

## آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۲/۲/۲۷  
موضوع امتحان: ترکیبیات

(۱)

الف) آیامی توان خانه‌های خالی هر کدام از آرایه‌های  $5 \times 5$  زیر را چنان پر کرد که حاصل یک مربع لاتین  $5 \times 5$  گردد؟ برای هر کدام از آنها در صورت مثبت بودن جواب، مربع حاصل را ارائه بدهید و در غیر این صورت دلیل آن را بنویسید.

۱	.	.	.	.
.	۱	.	.	.
.	.	۲	.	.
.	.	.	۱	.
.	.	.	.	۱

۱	۲	۳	.	.
۳	۱	۲	.	.
۲	۳	۱	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

ب) با توجه به الگوی هر کدام از آرایه‌های فوق آیا در هر حالت می‌توانید درباره شرط تکمیل آن یک قضیه کلی بیان کنید؟ (فقط صورت قضیه).

۲) فرض کنید  $G$  یک گراف و  $\Delta(G)$ ،  $e(G)$ ،  $m(G)$ ، و  $\chi(G)$  به ترتیب ماکزیمم درجه  $G$ ، تعداد یالهای  $G$ ، طول بزرگترین مسیر در  $G$  و عدد رنگی رأسی  $G$  باشند. ثابت کنید:

الف)  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

ب)  $(\chi(G))^2 - \chi(G) \leq 2e(G)$ .

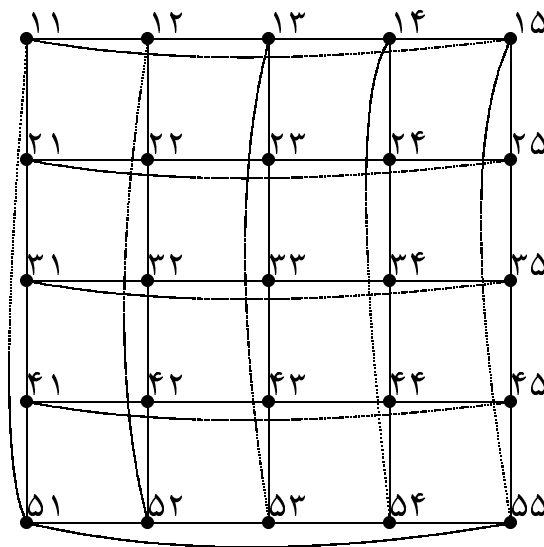
ج)  $\chi(G) \leq m(G) + 1$ .

(۳) یک خانواده  $\mathcal{F}$  از زیرمجموعه‌های مجموعه  $X$ ، اشتراکی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر (دو مجموعه)  $A, B \in \mathcal{F}$  داشته باشیم  $A \cap B \neq \emptyset$ .

الف) ثابت کنید اگر  $\mathcal{F}$  خانواده‌ای اشتراکی از زیرمجموعه‌های مجموعه  $X = \{1, \dots, n\}$  باشد آن‌گاه  $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ .

ب) ثابت کنید هر خانواده اشتراکی  $\mathcal{F}$  از  $X = \{1, \dots, n\}$  را می‌توان به یک خانواده اشتراکی از اندازه  $2^{n-1}$  گسترش داد.

(۴) یک مجموعه احاطه‌گر در یک گراف ساده  $G$ ، مجموعه‌ای از رأسها مانند  $S$  است که هر رأس از  $G$  یا در  $S$  باشد و یا مجاور یکی از رأسهای  $S$ . اندازه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر را برای گراف  $C_5 \times C_5$  (شکل زیر) تعیین کرده و یک مجموعه احاطه‌گر از آن اندازه پیدا کنید.



(۵) فرض کنید  $H$  یک ماتریس هادامار از اندازه  $4n$  باشد به طوری که مجموع هر سطر یا هر ستون آن عددی ثابت است (این عدد ثابت را در ادامه با  $t$  نمایش می‌دهیم).

الف) یک ماتریس هادامار از اندازه  $4$  با شرایط فوق مثال بزنید.

ب) اگر  $J$  ماتریس از اندازه  $4n$  با درایه‌های  $1$  باشد، نشان دهید  $A = \frac{1}{4}(H + J)$  ماتریس وقوع یک طرح متقارن است و پارامترهای آن را محاسبه کنید.

ج) نشان دهید برای چنین ماتریسی عدد  $t$  همواره زوج و عدد  $n$  همواره مربع کامل هستند.

۶) اگر  $k \geq 1$  یک عدد صحیح باشد، گراف  $G_k$  را با مجموعهٔ رئوس  $\mathbb{Z}_{2^k-1} = \{0, 1, \dots, 2^k - 2\}$  در نظر می‌گیریم. یالهای  $G_k$  به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$ab \in E(G_k) \iff a - b \equiv 1 \pmod{2^k}$$

(پیمانه ۲)

دقت کنید که عمل تفریق در  $\mathbb{Z}_{2^k-1}$  انجام می‌گیرد. به سوالات زیر در مورد  $G_k$  پاسخ دهید.

الف) برای هر  $k$ ، دنباله درجه‌ای رئوس  $G_k$  را مشخص کنید.

ب) قطر  $G_k$  را محاسبه کنید.

ج) تعداد مثلثهای  $G_k$  را محاسبه کنید.

د) آیا  $G_k$  هامیلتونی است؟ (چرا؟)

ه) هر نوع اطلاعات در مورد پارامترهای زیر از گراف  $G_k$  را که می‌توانید ارائه دهید.

(اطلاعات دقیق‌تر دارای نمره بیشتری است.)

i) عدد استقلال  $\alpha(G_k)$       ii) عدد رنگی  $\chi(G_k)$       iii) عدد همبندی رأسی  $\kappa(G_k)$