

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۲/۲/۲۷
موضوع امتحان: معادلات دیفرانسیل

۱- در مورد پایداری و یا پایداری مجانبی دستگاه زیر برحسب مقادیر a و b ($a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$) بحث کنید.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \frac{1}{4}x^3 - axy^2 \\ \dot{y} &= -x - 2y^3 - bx^2y\end{aligned}$$

۲- برای دستگاه غیرخطی زیر نقاط سکون و زیرفضاهای پایدار و ناپایدار E^s و E^u را به دست آورید.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -y + x^2 \\ \dot{z} &= z + x^2\end{aligned}$$

۳- فرض کنید $A(t)$ یک ماتریس $n \times n$ پیوسته و تناوبی با تناوب $T > 0$ باشد. ثابت کنید عدد مختلط λ یک مشخصه نمائی برای دستگاه $x' = A(t)x$ است اگر و فقط اگر جوابی غیرصفر از این معادله به صورت $e^{\lambda t}p(t)$ ، که در آن $p(t+T) = p(t)$ وجود داشته باشد.

۴- معادله دیفرانسیل انتقال حرارت زیر را حل کنید

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$\begin{aligned}u(0, t) &= 0, \quad t \geq 0 \\ u(1, t) &= t^2, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1\end{aligned}$$

۵- فرض کنید $T > 0$ عددی ثابت و u

$$u \in C(\bar{D}) \cap C^2(D), \quad D = \mathbb{R}^n \times (0, T)$$

جوابی از معادله $u_t = u_{xx}$ است. اگر $M = \sup_{\bar{D}} u(x, t)$ و $N = \sup_{\mathbb{R}^n} u(x, 0)$ باشد. ثابت کنید $M = N$.

۶- از دو مسئله زیر یکی را بطور دلخواه انتخاب کنید.

الف) فرض کنید $u(x, y) \neq 0$ یک جواب کلاسیک معادله

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - u^2 = 0$$

روی گوی واحد $x^2 + y^2 \leq 1$ می باشد. ثابت کنید u مقدار ماکزیمم خود را روی

$$x^2 + y^2 = 1$$
 می گیرد.

ب) معادله زیر را به طور کامل حل کنید.

$$\nabla^2 u = 0, \quad u = u(r, \theta), \quad r < a, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}.$$

$$u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{4}) = 0, \quad r \leq a$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=a} = \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Ph.D. Entrance Examination Differential Equation

- 1) Discuss the stability and asymptotic stability of the following system in terms of a and b , ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \frac{1}{2}x^3 - axy^2 \\ \dot{y} &= -x - 2y^3 - bx^2y\end{aligned}$$

- 2) Consider the following nonlinear system

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -y + x^2 \\ \dot{z} &= z + x^2\end{aligned}$$

Determine the equilibrium points and stable and unstable subspaces E^s , E^u .

- 3) Let $A(t)$ be an $n \times n$ continuous and periodic matrix of period $T > 0$. Show the complex number λ is a characteristic exponent of the system $x' = A(t)x$ if and only if this system has a nonzero solution $e^{\lambda t}p(t)$, where $p(t+T) = p(t)$.

- 4) Solve the one dimensional heat equation with given initial and boundary conditions

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(1, t) = t^2, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

- 5) Let T be a constant, $0 < T \leq \infty$ and let

$$u \in C(\bar{D}) \cap C^2(D), \quad D = \mathbb{R}^n \times (0, T)$$

be a solution of $u_t = u_{xx}$. If

$$M = \sup_D u(x, t), \quad N = \sup_{\mathbb{R}^n} u(x, 0)$$

Show $M = N$.

6) Solve one of the following two problems

a) Let $u(x, y) \neq 0$ be a classical solution of

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 8u_{yy} - u_x - u^2 = 0$$

on the unit disc $x^2 + y^2 \leq 1$. Show u assumes its maximum on $x^2 + y^2 = 1$.

b) Solve the following boundary value problem

$$\nabla^2 u = 0, \quad u = u(r, \theta), \quad r < a, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{4}.$$

$$u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{4}) = 0, \quad r \leq a$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=a} = \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$