بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **شنبه ۸۳/۳/۲**
موضوع امتحان: **نظریه احتمال و فرآیندهای تصادفی**

از شش سوال داده شده پنج سوال را به میل خود انتخاب کرده پاسخ دهید. شماره سوالهای انتخاب شده را روی برگه امتحانی بنویسید. اگر شماره سوالهای انتخاب شده ذکر نشده باشد فقط به پنج پاسخ اول نمره داده می‌شود.

تبصره: کلمات σ ـ جبر و σ ـ میدان به یک معنی هستند.

۱ــ فرض کنید Z انتگرال‌پذیر بوده و $\{\mathcal{F}_n\}$ یک دنباله صعودی از σ ـ جبرها باشد.

الف) (۵ نمره). نشان دهید که دنباله

$$E[Z|\mathcal{F}_n], \quad n = ۱, ۲, \dots$$

یک مارتینگل انتگرال‌پذیر یکنواخت است.

ب) (۷ نمره). اگر $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$، نشان دهید که با احتمال 1 داریم

$$E[Z|\mathcal{F}_n] \to E[Z|\mathcal{F}_\infty].$$

۲ــ بیاد آوریم که یک تابع $F : \mathbb{R} \to [۰, ۱]$ یک تابع توزیع خوانده می‌شود هر گاه خواص زیر را داشته باشد:

- $x < y \Longrightarrow F(x) \leq F(y)$
- F از راست پیوسته است.

- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = ۱$ و $\lim_{x\to-\infty} F(x) = ۰$.

حال موارد زیر را انجام دهید:

الف) (٦ نمره). فرض کنید F یک تابع توزیع باشد. متغیر تصادفی $X : (۰, ۱) \longrightarrow \mathbb{R}$ را بسازید که تابع توزیع‌اش مساوی F باشد، یعنی برای هر x داشته باشیم

$$P(X \leq x) = F(x) \qquad (۱)$$

ب) (٦ نمره). فرض کنیم X و F در (۱) صدق کنند (یعنی F تابع توزیع متغیر X باشد) و فرض کنید F **پیوسته** باشد. نشان دهید که ترکیب $F(X)$ دارای توزیع یکنواخت روی $(۰, ۱)$ است.

۳— الف) (۸ نمره). نشان دهید که گام برداشتن تصادفی (randam Walk) با حالتهای $۰, ۱, ۲, ۳, ۴$ و ماتریس احتمالهای انتقال

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۲}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۲}{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & ۰ & \frac{۲}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$$

یک زنجیر مارکف بازگشت پذیر در زمان (time reversible) است.

ب) (۴ نمره). فرض کنید یک سیستم مطابق با این زنجیر مارکف تغییر حالت دهد و هر بار که در یکی از حالتهای ۰ و ۴ قرار می‌گیرد دریافتی برابر یک واحد، و هر بار که در یکی از حالتهای ۱ و ۳ قرار می‌گیرد پرداختی برابر یک واحد داشته باشد، و هر بار که در حالت ۲ قرار می‌گیرد دریافت یا پرداخت نداشته باشد. درآمد متوسط این سیستم در دراز مدت چیست؟

۴— (۱۲ نمره). فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد. تعداد بالاگذرهای از یک بازه (α, β) توسط دنباله $X_۱, \ldots, X_n$ عبارتست از تعداد دفعاتی که دنباله از پائین α به بالای β می‌رود.

نشان دهید که برای یک زیر مارتینگل $\{X_i\}_{i=۱}^{n}$، تعداد بالاگذرها از (α, β)، که آن را به U نشان می‌دهیم، در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$E(U) \leq \frac{E|X_n| + |\alpha|}{\beta - \alpha}$$

۵− (۱۲ نمره). فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد که $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ و

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} P(A_k \cap A_l)}{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2} = 1.$$

نشان دهید $P(\limsup A_n) = 1$. توجه: در اینجا

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

راهنمایی: توابع مشخصه $I_n = 1_{A_n}$ را در نظر گرفته سپس واریانس متغیر $\sum\limits_{h=1}^{n} I_k$ را حساب کنید و سپس ...

۶− (۱۲ نمره). صورت زیر از قضیه حد مرکزی را برای واریانس نمونه‌ای ثابت کنید:

فرض کنید X_1 و ... و X_n یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان با میانگین مشترک μ و واریانس $\sigma^2 > 0$ باشد. فرض کنید $\mu_4 = E\{(X_1 - \mu)^4\}$ و فرض کنید که $0 < \sigma^4 < \mu_4 < \infty$. قرار دهید

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

حال نشان دهید که

$$\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mu_4 - \sigma^4),$$

که در آن $\mathcal{L}$ معرف همگرایی در توزیع است.

راهنمایی: از قضیه Slutsky که در زیر می‌آید می‌توانید استفاده کنید:

قضیهٔ Slutsky: فرض کنید $\{U_n\}$ و $\{V_n\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی باشد. فرض کنید U متغیری تصادفی و c عددی ثابت باشد. فرض کنید $U_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U$ و $V_n \xrightarrow{P} c$ (که منظور از $\xrightarrow{P}$ همگرایی در احتمال است). آنگاه موارد زیر برقرار هستند:

i) $U_n \pm V_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U \pm c$

ii) $U_n V_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cU$

iii) $U_n V_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{L}} c^{-1}U$ مشروط بر آنکه $c \neq 0$ و $P(V_n = 0) = 0$.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Ehtemal

Answer five questions from the following six. Write the numbers of questions chosen on the cover of the answer book; otherwise only the first five answers will be graded.

Note: In the following questions, the words **σ-algebra** and **σ-field** mean the same.

1. Suppose Z is an integrable random variable and that $\{\mathcal{F}_n\}$ is an increasing sequence of σ-fields.

   a) [**5 points**] Prove that the sequence $E[Z \mid \mathcal{F}_n]$ is a uniformly integrable martingale.

   b) [**7 points**] Prove that if $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$, then

   $$E[Z \mid \mathcal{F}_n] \to E[Z \mid \mathcal{F}_\infty]$$

   with probability 1.

2. We recall that a function $F : \mathbb{R} \to [0\,,\,1]$ is called a distribution function if it has the following properties:

   - $x < y \Longrightarrow F(x) \le F(y)$.
   - F is right-continuous.
   - $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \circ$ and $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

   Now do the following:

   a) [**6 points**] Let F be a distribution function on R. Construct a random variable $X : (0,1) \to R$ whose distribution function is F, i.e. for every $x \in R$ we have $P(X \le x) = F(x)$.

   b) [**6 points**] Let X be any random variable with **continuous** distribution function F. Show that $F(X)$ is uniformly distributed as $uinform(0\,,\,1)$.

3. **a)** **[8 points]** Show that a random walk with state space $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ and with the transition probability matrix given by

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

is a time reversible Markov chain.

b) **[4 points]** Assume a system changes state according to this Markov chain. Whenever the system is in state 0 or in state 4, it gains one unit of money. Whenever the system is in state 1 or in state 3, it loses one unit of money. Whenever the system is in state 2, it gains or loses nothing. What is the long-run average income of this system?.

4. **[12 points]** Let $(\alpha\,,\,\beta)$ is a finite interval and let $X_1, ..., X_n$be random variables. The number of upcrossings of $(\alpha\,,\,\beta)$ is the number of times the sequence passes from the below α to the above β. Show that for a submartingale $X_1, ..., X_n$, the number U of upcrossings satisfy

$$E(U) \leq \frac{E|X_n| + |\alpha|}{\beta - \alpha}$$

5. **[12 points]** On a probability space assume events A_n with $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ and

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} P(A_k \cap A_l)}{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2} = 1.$$

Prove that $P(\limsup A_n) = 1$.

Hint: Take the indicator functions (characteristic function) $I_n = 1_{A_n}$ and see what the variance of the random variable $\sum_{k=1}^{n} I_k$ would be in terms of the A_n's.

6. **[12 points]** Prove the following form of the Central Limit Theorem for the Sample Variance:

Let $X_1, ..., X_n$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with mean μ and variance σ^2. Let the number $\mu_4 = E\{(X_\setminus - \mu)^4\}$ satisfy $\sigma^4 < \mu_4 < \infty$. Set

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{and} \quad S_n^2 = \frac{1}{n - \setminus}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Show that

$$\sqrt{n}(S_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0\,,\,\mu_4 - \sigma^4) \quad \text{as } n \to \infty,$$

where by $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ we mean the convergence in distribution.

Hint: You may use the Slutsky's Theorem which is:

Slutsky's Theorem: Let U_n and V_n be two sequences of random variables. Let U be a random variable and c be a constant. Let $U_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U$ and $V_n \xrightarrow{P} c$ (which by $\xrightarrow{P}$ we mean the convergence in probability). Then the following hold:

i) $U_n \pm V_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U \pm c$.

ii) $U_n V_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cU$.

iii) $U_n V_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{L}} c^{-1}U$ provided that $c \neq 0$ and $P(V_n = 0) = 0$.