بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۸۲/۲/۲۶**
موضوع امتحان: **منطق**

(۱۰ نمره) ۱. فرض کنید زبان مرتبهٔ اوّل $\mathcal{L} = \{F\}$ داده شده که در آن، F یک نماد تابعی یک موضعی است.

(a) جملهٔ σ را در این زبان بنویسید که برای هر مدل $\mathcal{A}$، $\mathcal{A} \models \sigma$ اگر و فقط اگر $\mathcal{A}$ نامتناهی باشد.

(b) ثابت کنید برای هر مجموعهٔ X، تابع یک به یک و پوشای $f : X \to X$ موجود است که نقطهٔ ثابت ندارد.

(۱۰ نمره) ۲. ثابت کنید نظریهٔ مرتبهٔ اوّل T کامل است اگر و فقط اگر برای هر دو مدل $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ برای T، مدل $\mathcal{C}$ برای T وجود داشته‌باشد که $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ و $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$.

(۱۰ نمره) ۳. نظریه حساب پئانو را PA بنامید.

(a) ثابت کنید PA نظریه‌ای مدل کامل نیست.

(b) آیا هر مدل غیراستاندارد PA یک توسیع پایانی $(N, +, ., S, <, ۰, ۱)$ است؟ چرا؟

(۱۰ نمره) ۴. فرض کنید T نظریهٔ ترتیب خطی گسسته با یک نقطهٔ ابتدایی در زبان $\mathcal{L} = \{S, \leq, ۰\}$ با اصول زیر باشد ($x < y$ یعنی $x \leq y \wedge \neg x = y$):

- اصول ترتیب خطی،
- $S(x) = y \leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < y)$،
- $\forall x (۰ \leq x)$،

- $\forall x(x = 0 \vee \exists y(y = S(x)))$.

تعریف: مدل $\mathcal{A}$ را به‌طور شمارا عمومی گویند اگر شمارا باشد و هر مدل شمارای $\mathcal{B}$، که $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$، به‌طور مقدماتی در $\mathcal{A}$ قابل نشاندن باشد.

(a) آیا T مدل کامل است ؟

(b) ثابت کنید که T یک مدل به‌طور شمارا عمومی دارد.

۵. (۱۰ نمره)

(a) V_α را برای هر عدد ترتیبی α تعریف کنید.

(b) ثابت کنید که اگر κ دسترسی ناپذیر باشد، $|V_\kappa| = \kappa$.

۶. (۱۰ نمره) **تعریف**: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ردهٔ متعدی باشد. می‌گوییم فرمول $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ برای $\mathcal{M}$ مطلق است اگر و فقط اگر

$\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ اگر و فقط اگر $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$، برای هر $x_1, \cdots, x_n$ در $|\mathcal{M}|$.

کدام‌یک از عبارات زیر برای رده‌های متعدی، مطلق‌اند:

(a) x متعدی است.

(b) x یک عدد ترتیبی است.

(c) x یک عدد طبیعی است.

(d) x یک عدد اصلی است.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Mathematical Logic

(10 points) 1. Let $\mathcal{L} = \{F\}$ be a first order language with a monadic function symbol.

(a) Find a sentence σ in $\mathcal{L}$ such that for every model $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \sigma$ if and only if $\mathcal{A}$ is infinite.

(b) Prove that for any infinite set X, there is a one to one and onto function $f : X \to X$ without any fixed point.

(10 points) 2. Prove that any first order theory T is complete if and only if for any two models $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ of T, there is a third model $\mathcal{C}$ of T such that $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ and $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$.

(10 points) 3. Let PA be the first order theory of Peano Arithmetic.

(a) Show that PA is not a model complete theory.

(b) Is every non-standard model of PA an end-extension of $(N, +, ., S, <, \circ, \text{۱})$? Why?

(10 points) 4. Let T be the theory of discrete linear order with an initial element in the language $\mathcal{L} = \{S, \leq, \circ\}$ with the following axioms ($x < y$ means $x \leq y \wedge \neg x = y$):

- the axioms of linear order,
- $\forall x(\circ \leq x)$,
- $\forall x \forall y(y = S(x) \leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists z(x < z \wedge z < y))$,
- $\forall x(x = \circ \vee \exists y(y = S(x)))$.

Definition: A model $\mathcal{A}$ is said to be *countably universal* if $\mathcal{A}$ is countable and every countable model $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ is elementarily embedded in $\mathcal{A}$.

(a) Is T a model complete theory?

(b) Prove that T has a countably universal model.

(10 points) 5.

(a) Define the sets V_α, for every ordinal α.

(b) Prove that if κ is inaccessible, then $|V_\kappa| = \kappa$.

(10 points) 6. Definition: Let $\mathcal{M}$ be a transitive class. We say $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ is *absolute* for $\mathcal{M}$ iff

$$\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \cdots, x_n) \text{ iff } \varphi(x_1, \cdots, x_n), \text{ for all } x_1, \cdots, x_n \in |\mathcal{M}|.$$

Which of the following expressions are absolute for transitive classes:

(a) $\varphi(x) \equiv x$ is transitive.

(b) $\varphi(x) \equiv x$ is an ordinal.

(c) $\varphi(x) \equiv x$ is a natural number.

(d) $\varphi(x) \equiv x$ is a cardinal number.