

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی

## آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۲/۲/۲۵  
موضوع امتحان: آنالیز عددی

۱- از دو مسئله زیر یکی را به دلخواه انتخاب کنید.

الف) مطلوبست محاسبه دو مقدار ویژه مسئله مقدار ویژه زیر با شرایط مرزی داده شده

$$y'' - 2y' \tan x + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

(راهنمایی: از تغییر متغیر  $y = \frac{z}{\cos x}$  استفاده نمایید.)

ب) با استفاده از روش کوچکترین مجموع مربعات کثیرالجزء مرتبه سوم را با استفاده از جدول زیر تقریب بزنید.

$x$	۱	۲	۳
$y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

۲- فرض کنید  $A, B$  دو ماتریس  $n \times n$  باشند و فرض کنید  $A$  یک ماتریس غیرتکین است اگر

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

i)  $\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|}$

ii)  $\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|A - B\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|}$

۳- برای تابع  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ،  $x \in I = [1, 2]$ ، مطلوبست بهترین تقریب از درجه سوم با نرم

$$\|f\| = \int_I |f|^2 dx \text{ و}$$

$$\|f\| = \sup_I |f|$$

۴- با استفاده از روش خم‌های شاخص برای معادله

$$xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (y^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xy(x^2 - y^2)$$

روی خط  $y = 1$  از  $x = 1$  تا  $x = 2$ . روی این خط داریم  $u = x^2$  و در نتیجه  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$  و  $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2$ . با استفاده از  $h = \frac{1}{4}$  جواب معادله برای یک سطر بدست آورید.

۵- با استفاده از قضیه دایره گرشگورین یک کران برای صفرهای کثیرالجمله مرتبه چهارم زیر بدست آورید.

$$p(x) = x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 200x - 425$$

زاهنمایی: ماتریس «همراه»  $A$  متناظر با کثیرالجمله  $p(x)$  را بنویسید و قضیه دایره گرشگورین را برای تخمین مقادیر ویژه  $A$  بکار ببرید.

۶- با استفاده از روش عناصر محدود، معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط مرزی داده شده

$$x^2 y'' + 2xy' = x^2$$

$$y(1) = y(2) = 0$$

الف) با اختیار کردن  $\phi_1(x) = x^2 - 3x + 2$  و  $\phi_2(x) = x^3 - 7x + 6$  حل کنید.

ب) با استفاده از توابع کلاهی روی نقاط ۲، ۱.۷۵، ۱.۵، ۱.۲۵، ۱، به عنوان توابع پایه مسئله را حل کنید.

خطای ترکیب شده در هر دو حالت را محاسبه کنید.

## Ph.D. Entrance Examination Numerical Analysis

1) Choose one of the following two problems to solve.

a) Determine two eigenvalues of the following eigenvalue problem with given boundary conditions

$$y'' - 2y' \tan x + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

(Hint: Apply the change of variable  $y = \frac{z}{\cos x}$ .)

b) Use the method of least squares to approximate the third order polynomial from the following table.

$x$	1	2	3
$y$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$

2) Let  $A$  and  $B$  be two  $n \times n$  matrices. Assume  $A$  is nonsingular. If  $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

Show

i)  $\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|}$

ii)  $\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|A - B\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|}$

3) Let  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ,  $x \in [1, 2]$ . Find the best third order approximation using the norms

$$\|f\| = \sup_{x \in I} |f| \text{ and } \|f\| = \int_I |f|^2 dx.$$

4) Use the method of characteristics for the equation

$$xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (y^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xy(x^2 - y^2)$$

On the line  $y = 1$  from  $x = 1$  to  $x = 2$ . On this line we have  $u = x^2$  which gives  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$  and  $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2$ . Use  $h = \frac{1}{4}$  to obtain the solution for one line.

- 5) Use Gerschgorin circle theorem to find a bound for the zeroes of the following polynomial

$$p(x) = x^4 + 8x^3 - 8x^2 - 200x - 425$$

(Hint: Write the companion matrix  $A$  of the polynomial and use Gerschgorin circle theorem to estimate the bounds for the eigenvalues of  $A$ .)

- 6) Use finite element method to solve the following differential equation with given boundary conditions

$$\begin{aligned}x^2 y'' + 2xy' &= x^2 \\ y(1) = y(2) &= 0\end{aligned}$$

by,

a) Choosing  $\phi_1(x) = x^2 - 3x + 2$ ,  $\phi_2(x) = x^3 - 7x + 6$ .

b) Using hat functions as basis on the points 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2.

Find the error in both cases.