بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۲/۲/۲۶
موضوع امتحان: نظریه اعداد

۱– فرض کنید $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ یک تابع ضربی باشد. نشان دهید f کاملاً ضربی است اگر و تنها اگر برای هر $n \geq ۱$ داشته باشیم $f^{-۱}(n) = \mu(n)f(n)$. (در اینجا $f^{-۱}$ وارون f نسبت به عمل ضرب دیریشله است و μ تابع موبیوس است.)

۲– فرض کنید p یک عدد اول فرد ζ_p یک ریشهٔ p–ام اولیهٔ واحد و $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ باشد. همگی زیرمیدانهای $F \subseteq K$ را با $[F:\mathbb{Q}] = ۲$ بیابید.

۳– فرض کنید $\mathbb{F}_{p^n}$ میدان متناهی با p^n عضو باشد.

الف) اگر $۱ \leq m \leq n$، نشان دهید $\mathbb{F}_{p^m}$ با یک زیرمیدان $\mathbb{F}_{p^n}$ یکریخت است اگر و تنها اگر $m|n$.

ب) اگر $\bar{\mathbb{F}}_p$ بستار جبری $\mathbb{F}_p$ باشد، آیا میدانی مانند $\mathbb{F}_p \subseteq K \subseteq \bar{\mathbb{F}}_p$ وجود دارد به‌طوریکه هر دو درجهٔ $[K:\mathbb{F}_p]$ و $[\bar{\mathbb{F}}_p : K]$ نامتناهی باشند؟

۴– فرض کنید d یک عدد صحیح مثبت و $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ باشد. نشان دهید K را نمی‌توان در یک گسترش دوری $\mathbb{Q}$ از درجه‌ای مضرب ۴ نشاند.

۵– عدد رده‌ای میدان $\mathbb{Q}(\sqrt{۱۴})$ را بیابید.

۶– فرض کنید p, q دو عدد اول فرد متمایز و $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ باشد. پایه‌ای برای حلقهٔ عناصر صحیح K روی $\mathbb{Z}$ بیابید.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Number Theory

1) Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ be a multiplicative function. Show that f is completely multiplicative if and only if $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$ for all $n \geq 1$. (f^{-1} is the inverse of f with respect to Dirichlet product, and μ is the Mobius function.)

2) Let p be an odd prime number, ζ_p a primitive p-th root of unity, and $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Find all subfields $F \subseteq K$ with $[F : \mathbb{Q}] = 2$.

3) Let $\mathbb{F}_{p^n}$ be the finite field with p^n elements.

a) For $1 \leq m \leq n$, show that $\mathbb{F}_{p^m}$ is isomorphic to a subfield of $\mathbb{F}_{p^n}$ if and only if $m|n$.

b) Let $\bar{\mathbb{F}}_p$ be the algebraic closure of $\mathbb{F}_p$.

Is there a field $\mathbb{F}_p \subseteq K \subseteq \bar{\mathbb{F}}_p$ with both $[K : \mathbb{F}_p]$ and $[\bar{\mathbb{F}}_p : K]$ infinite?

4) Let d be a positive integer and $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Show that K can't be embedded in a cyclic extension of $\mathbb{Q}$ whose degree over $\mathbb{Q}$ is a multiple of 4.

5) Find the class number of $\mathbb{Q}(\sqrt{14})$.

6) Let p, q be two distinct odd prime numbers, and $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$. Find a basis for the ring of integers of K over $\mathbb{Q}$.