

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی

## آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۲/۲/۲۶  
موضوع امتحان: بهینه‌سازی

برای مساله‌های ۱ و ۲، مساله‌های برنامه‌ریزی خطی (M) و (N) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$(M) \quad \begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$(N) \quad \begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y + s = c \\ & s \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن  $A$ ،  $c$ ،  $b$ ،  $m \times n$ ،  $m \times 1$ ،  $m \times 1$  داده شده (درایه‌ها معلوم) هستند. فرض کنید  $A$  دارای رتبه سطری کامل است، یعنی،  $m = \text{رتبه}(A)$ .

۱- قسمت‌های (الف) تا (ت) را ثابت کنید. برای قسمت (ث) توجیه مناسب ارائه کنید.

(۲ نمره) - الف) به‌ازای  $s \geq 0$  داده شده، یک  $y$  یگانه وجود دارد به‌طوری‌که  $(y, s)$  برای (N) شدنی است.

(۲ نمره) - ب) اگر  $x$  برای (M) شدنی و  $(y, s)$  برای (N) شدنی باشد، آنگاه

$$b^T y \leq c^T x$$

(۲ نمره) - پ) اگر (M) نامتناهی باشد آنگاه (N) ناشدنی است.

(۲ نمره) - ت) اگر (N) نامتناهی باشد آنگاه (M) ناشدنی است.

(۲ نمره) - ث) آیا (M) و (N) هر دو می‌توانند ناشدنی باشند؟ چرا؟

-۲

(۵ نمره) - الف) اگر (M) و (N) هر دو شدنی باشند، آنگاه  $x^*$ ، یک جواب بهینه برای (M)، و  $(y^*, s^*)$ ، یک جواب بهینه برای (N) وجود دارند به طوریکه

$$c^T x^* = b^T y^*$$

(۵ نمره) - ب) مساله‌های (M) و (N) دارای جوابهای بهینه هستند اگر و تنها اگر دستگاه (P) مطابق زیر دارای جواب باشد:

$$(P) \quad \begin{aligned} Ax &= b \\ A^T y + s &= c \\ x_i s_i &= 0 \quad i = 1, \dots, n \\ x &\geq 0 \\ s &\geq 0 \end{aligned}$$

(۱۰ نمره) - ۳) یک شرکت بزرگ تولیدی می‌خواهد دپارتمانهای خود را به خارج از تهران منتقل کند. شرکت از ده دپارتمان  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  تشکیل شده است. جهت انتقال این دپارتمانها چهار شهر  $X, Y, Z, T$  در نظر گرفته شده‌اند. البته یک دپارتمان می‌تواند منتقل نشود و همچنان در تهران باقی بماند با این شرط که پس از انتقال دپارتمانها در هیچ شهری از جمله تهران بیش از سه دپارتمان موجود نباشد. فرض کنید منافع انتقال هر دپارتمان نظیر  $i$  از شهر تهران به یکی از شهرهای فوق نظیر  $j$  با  $B_{ij}$  نشان داده شود و جزء داده‌های مساله باشد. از طرف دیگر این انتقال هزینه‌ای را برای ارتباط مابین دپارتمانها به شرکت تحمیل می‌کند. این هزینه ارتباطی به صورت  $C_{ik} D_{jl}$  است که در آن  $C_{ik}$  تعداد ارتباطات دپارتمانهای  $i$  و  $k$  در طول سال و  $D_{jl}$  هزینه هر ارتباط مابین شهرهای  $j$  و  $l$  است. فرض می‌شود که  $C_{ik}$  و  $D_{jl}$  نیز داده شده باشند. مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی این مساله را به منظور تعیین محل دپارتمانها با هدف کمینه کردن کل هزینه به دست آورید.

-۴

(۲ نمره) الف) تعریف یک ماتریس کاملاً تک مدولی (Totally Unimodular Matrix) را بنویسید.

(۳ نمره) ب) شرط کافی را برای آن که یک ماتریس نظیر  $A$  کاملاً تک مدولی باشد بیان کرده و آن را ثابت کنید.

(۳ نمره) ج) مساله IP زیر را در نظر بگیرید

$$(IP) \quad \begin{aligned} \max z &= c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0, \text{ integer} \end{aligned}$$

با فرض اینکه عناصر  $A$  و  $b$  عدد صحیح باشند ثابت کنید اگر ماتریس  $A$  یک ماتریس کاملاً تک مدولی باشد آنگاه جواب بهینه مساله IP را می توان با حذف شرط عدد صحیح بودن متغیرها به دست آورد.

(۲ نمره) د) آیا می توان قضیه مطرح شده در بند (ج) را به صورت شرط لازم و کافی نوشت؟ اگر پاسخ مثبت است آن را بیان نموده و ثابت کنید و اگر پاسخ منفی است دلیل خود را شرح دهید.

(۱۰ نمره) ۵- فرض کنید  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \neq 0$ . فرض کنید  $Q$  یک ماتریس معین مثبت متقارن است. نشان دهید مقدار بهینه مساله  $\max c^T x \quad s.t. \quad x^T Q x \leq 1$  برابر است با  $\sqrt{c^T Q^{-1} c}$ . با استفاده از این مطلب نشان دهید که به ازای هر  $x \in \mathbb{R}^n$  داریم:

$$c^T x \leq \sqrt{x^T Q x} \sqrt{c^T Q^{-1} c}$$

(۱۰ نمره) ۶- فرض کنید توابع  $f$  و  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ، به طور پیوسته مشتق پذیر از  $\mathbb{R}^n$  به  $\mathbb{R}$  باشند. مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\min f(x) \quad s.t. \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

فرض کنید  $x^*$  یک نقطه شدنی باشد و قرار دهید  $I = \{i | g_i(x^*) = 0\}$ . نشان دهید  $x^*$  یک نقطه Fritz Jhon است اگر و تنها اگر مقدار بهینه مساله زیر برابر با صفر باشد.

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ s.t. \quad & \nabla f(x^*)^T d - z \leq 0 \\ & \nabla g_i(x^*)^T d - z \leq 0 \quad i \in I \\ & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

## Ph.D. Entrance Examination Optimization

For problems 1 and 2 consider the LP problems (M) and (N) as follows:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq \circ \end{aligned} \tag{M}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y + s = c \\ & s \geq \circ \end{aligned} \tag{N}$$

where  $A$ ,  $m \times n$ ,  $c$ ,  $n \times 1$ ,  $b$ ,  $m \times 1$ , are given (with known components). Assume that  $A$  has full row rank, i.e.,  $\text{rank}(A) = m$ .

1. Prove parts (a)-(d) below. For part (e) give supporting argument.

- a) For a given  $s \geq \circ$ , there is a unique  $y$  such that  $(y, s)$  is feasible for (N). (2 points)
- b) If  $x$  is feasible for (M) and  $(y, s)$  is feasible for (N) then  $b^T y \leq c^T x$ . (2 points)
- c) If (M) is unbounded then (N) is infeasible. (2 points)
- d) If (N) is unbounded then (M) is infeasible. (2 points)
- e) Can both (M) and (N) be infeasible? Why or Why not? (2 points)

2.

(5 points) a) If (M) and (N) are both feasible then  $x^*$ , optimal for (M), and  $(y^*, s^*)$  optimal for (N) exist such that

$$c^T x^* = b^T y^*$$

(5 points) b) Problems (M) and (N) have optimal solutions if and only if the system (P) below has a solution:

$$\begin{aligned}
 Ax &= b \\
 A^T y + s &= c \\
 x_i s_i &= 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 x &\geq 0 \\
 s &\geq 0
 \end{aligned}
 \tag{P}$$

(10 points) 3. A large company wishes to move some of its departments out of Tehran. The company comprises 10 departments  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  and the possible cities for reallocation are  $X, Y, Z, T$ . A department may be kept in Tehran but none of these cities including Tehran may be the location of more than 3 departments. The benefits of relocation of department  $i$  from Tehran to city  $j$  is denoted by  $B_{ij}$  and suppose that it is given. Also, however, there are communication costs between departments. The communication costs are of the form  $C_{ik} D_{jl}$ , where  $C_{ik}$  is the quantity of communication between departments  $i$  and  $k$  per year and  $D_{jl}$  is the cost per unit of communication between cities  $j$  and  $l$ . It is supposed that  $C_{ik}$  and  $D_{jl}$  are also given. Formulate this problem as an integer linear programming to determine the location of each department in order to minimize the overall cost.

4.

(2 points) a) Write the definition of a totally unimodular matrix.

(3 points) b) First write a sufficient condition for total unimodularity of a matrix  $A$  and then prove it.

(3 points) c) Consider the following IP problem.

$$\begin{aligned}
 \max z &= c^T x \\
 (IP) \quad Ax &= b \\
 x &\geq 0, \text{ integer}
 \end{aligned}$$

Suppose that the elements of  $A$  and  $b$  are integer numbers. Prove that if  $A$  is a totally unimodular matrix then an optimal solution of IP can be obtained by the linear programming relaxation of IP.

**(2 points) d)** Is the converse of the theorem described in part c true? If the answer is yes prove it, otherwise explain your reason(s).

**(10 points) 5.** Given a vector  $c \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ . Consider the problem  $\max c^T x \quad s.t. \quad x^T Q x \leq 1$ , where  $Q$  is a positive definite symmetric matrix. Show that the optimal value is  $\sqrt{c^T Q^{-1} c}$  and use this fact to establish the inequality

$$c^T x \leq \sqrt{x^T Q x} \sqrt{c^T Q^{-1} c}, \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^n.$$

**(10 points) 6.** Consider the problem  $\min f(x) \quad s.t. \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$ , where the functions  $f$  and  $g_i, i = 1, \dots, m$ , are continuously differentiable. Let  $x^*$  be a feasible solution and let  $I = \{i | g_i(x^*) = 0\}$ . Consider the following problem:

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & \nabla f(x^*)^T d - z \leq 0 \\ & \nabla g_i(x^*)^T d - z \leq 0 \quad i \in I \\ & -1 \leq d_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Show that  $x^*$  is a Fritz John point if and only if the optimal objective value to the above problem is equal to zero.