بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۸۴/۲/۳۱**
موضوع امتحان: **احتمال و فرآیندهای تصادفی**

از شش سوال داده شده پنج سؤال را به میل خود انتخاب کرده پاسخ دهید. شماره سؤالهای انتخاب شده را روی برگه امتحان بنویسید. اگر شماره سؤالهای انتخاب شده ذکر نشده باشند فقط به پنج پاسخ اول نمره داده می‌شود.

۱− گیریم $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([۰, ۱], \mathcal{B}, m)$. میدان‌های سیگمایی $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}_i$ را به‌صورت

$$\mathcal{F} = \sigma\{[\frac{k-۱}{۱۷}, \frac{k}{۱۷}) \ \ , \ \ k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۷\}$$

$$\mathcal{F}_i = \sigma\{[\frac{k-۱}{۱۷}, \frac{k}{۱۷}) \ \ , \ \ k = ۰, ۱, ۲, \ldots, i\}$$

تعریف می‌کنیم. فرض کنیم Y یک متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر باشد.

الف) مطلوب است محاسبه $E(Y|\mathcal{F})$. ادعای خود را ثابت کنید.

ب) ثابت کنید $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ یک مارتینگل است، که در آن $X_n = E(Y|\mathcal{F}_n)$.

۲− گیریم $X_۱, X_۲, \ldots$ متغیرهای تصادفی $(i.i.d)$ مستقل، هم‌توزیع نرمال استاندارد باشند. نشان دهید

$$\sum_{n=۱}^{\infty} X_n \frac{\sin(n\pi t)}{n}$$

تقریباً همه‌جا همگرا است.

۳– فرض کنیم X دارای چگالی f و

$$p(\alpha \le X \le \beta) = ۱$$

و g یک تابع صعودی مشتق‌پذیر روی (α, β) است. ثابت کنید در آن صورت $g(X)$ دارای چگالی

$$\frac{f(g^{-۱}(x))}{g'(g^{-۱}(x))}$$

برای هر $x \in (g(\alpha), g(\beta))$ و صفر در خارج این بازه است.

۴– گیریم Y یک متغیر تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است بطوریکه $E|Y| < \infty$ و $X_۲, X_۱$ بردارهای تصادفی هستند که $\mathcal{F}(Y, X_۱)$ مستقل از $\mathcal{F}(X_۲)$ باشد. ثابت کنید که

$$E(Y|X_۱, X_۲) = E(Y|X_۱) \quad a.s.$$

۵– صورت قضیه توسیع کلمرگرف و طرح اثبات این قضیه را بنویسید.

٦– زنجیر مارکف با حالتهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و باماتریس انتقال حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

الف) آیا این زنجیر کاهش‌پذیر است؟ جواب خود را تشریح کنید.

ب) رده‌های حالتهای این زنجیر مارکف را مشخص کرده وحالتهای مداوم و گذرا را تعیین کنید.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Probability and stochastic processes.

Answer five questions from the following six. Write the numbers of questions chosen on the cover of the answer book; otherwise only the first five answers will be graded.

1) Let $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}, m)$. Define sigma fields $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_i$ as follow

$$\mathcal{F} = \sigma\{[\frac{k-1}{17}, \frac{k}{17}) \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,17\}$$

$$\mathcal{F}_i = \sigma\{[\frac{k-1}{17}, \frac{k}{17}) \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots,i\}.$$

Suppose Y is an integrable random variable.

a) Compute $E(Y|\mathcal{F})$. Justify your claim.

b) Show that $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ is a martingale, where $X_n = E(Y|\mathcal{F}_n)$

2) Let $X_1, X_2, \ldots$ be $(i.i.d)$ standard normals. Show that for any t

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\sin(n\pi t)}{n}$$

converges a.s.

3) Suppose X has density f, $P(\alpha \leq X \leq \beta) = 1$ and g is a function that is increasing and differentiable on (α, β). Show that $g(X)$ has density

$$\frac{f(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}$$

for $x \in (g(\alpha), g(\beta))$ and 0 otherwise.

4) Let Y be a random variable on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ such that $E|Y| < \infty$, and X_1, X_2 random vectors such that $\mathcal{F}(Y, X_1)$ is independent of $\mathcal{F}(X_2)$. Prove that

$$E(Y|X_1, X_2) = E(Y|X_1) \quad a.s.$$

5) State Kolmogrove Extension Theorem and sketch a proof of this theorem

6) Consider a Markov chain consisting of the five states $0, 1, 2, 3, 4$ with transition probabilities matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a) Is this chain Irreducible? Justify your claim.

b) Specify the chasses of this chain and determine whether they are transient or recurrent.