

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی

## آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۲/۲/۲۶  
موضوع امتحان: احتمال و فرآیندهای تصادفی

از شما سوال داده شده پنج سوال را به میل خود انتخاب کرده پاسخ دهید. شماره سوالهای انتخاب شده را روی برگه امتحانی بنویسید. اگر شماره سوالهای انتخاب شده ذکر نشده باشند فقط به پنج پاسخ اول نمره داده می شود.

۱- فرض کنیم  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  یک فضای احتمال باشد. گیریم تابع  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  فقط تعداد شمارش پذیر مقادیر  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$  را بپذیرد.

الف) نشان دهید که  $X$  یک متغیر تصادفی است اگر و تنها اگر

$$(۱) \quad X^{-1}(a_k) \in \mathcal{F} \quad k = 1, 2, \dots$$

ب) فرض کنیم (۱) برقرار باشد. نشان دهید که

$$(۲) \quad E[|X|] = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| P[X = a_k]$$

پ) اگر (۱) برقرار باشد و  $E[|X|] < \infty$ ، نشان دهید که

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P[X = a_k]$$

ث) اگر (۱) برقرار باشد و  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  اندازه‌پذیر و کراندار باشد، نشان دهید که

$$E[f(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)P[X = a_k]$$

۲- برای هر  $t > 0$  اگر  $E(|X|^t) < \infty$  اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-1} P(|X| \geq n) < \infty$$

۳- گیریم  $X_1$  و  $X_2$  و ... یک زیرمارتینگل غیرمنفی باشد. نشان دهید برای هر  $l > 0$

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{1 \leq j \leq n} X_j > l\right) &\leq \frac{1}{l} \int_{\{\sup_{1 \leq j \leq n} X_j > l\}} X_n dP \\ &\leq \frac{1}{\lambda} E(X_n) \end{aligned}$$

۴- فرض کنیم  $p > 1$  و مارتینگل  $\{X_n\}$  (با  $\sigma$ -میدانهای متناظر  $\{\mathcal{F}_n\}$ ) در فضای  $L^p$  کراندار است

( $\sup_n \|X_n\|_{L^p} < \infty$ ) در این صورت متغیر تصادفی  $X \in L^p$  چنان موجود است که

$$\forall n \geq 1 \quad X_n = E(X | \mathcal{F}_n)$$

بالاخص داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_{L^p} = 0$$

۵- فرض کنید تعداد تماسهای تلفنی با یک مرکز خدماتی در یک بازه زمانی به طول  $t$  (دقیقه)،  $t > 0$

یک فرآیند تصادفی پواسون با پارامتر  $\lambda = 3$  باشد.

الف) اگر از همین لحظه به بعد  $T_1$  زمان اولین تماس تلفنی،  $T$  طول زمان بین تماس تلفنی دوم و

سوم و  $T_7$  زمان تماس تلفنی هفتم باشد، توزیعهای هر یک از این سه متغیر تصادفی را به

دست آورید.

ب) فرض کنید  $T_n$  زمان  $n$ امین تماس تلفنی را نمایش دهد، این متغیر تصادفی پیوسته است یا

گسسته؟ اگر پیوسته است تابع چگالی و اگر گسسته است تابع احتمال آن را بیابید.

پ) تابع چگالی زیر داده شده است

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \quad 0 < x < 1$$

که در آن

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با تابع چگالی بالا به ازای  $\alpha = 2$  و  $\beta = 3$  باشد و  $Y$  یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای  $p$  ( $0 < p < 1$ ) و  $n = 4$ ، نشان دهید

$$P(X \leq p) = P(Y \geq 2)$$

۶- فرض کنید  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  یک زنجیر مارکوف همگن و تجزیه‌ناپذیر روی فضای حالت متناهی  $V = \{1, \dots, n\}$  با ماتریس انتقال حالت  $P = [p_{ij}]$  باشد. اگر بدانیم که

$$\forall i \in V \quad p_{ii} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\forall i, j \in V \quad p_{ij} = 0 \Leftrightarrow p_{ji} = 0 \quad (\text{ب})$$

(ج)  $p_{ij} = \frac{1}{d_i}$  که در آن  $d_i$  تعداد اعضای مجموعه  $\{j \in V / p_{ij} \neq 0\}$  است.

اگر  $T_k = \min\{t \geq 0 / X_t = k\}$  متغیر تصادفی متناظر با زمان اولین برخورد با حالت  $k$  باشد مجموع زیر را محاسبه کنید

$$\frac{1}{2} \sum_{i, j \in V} (E_i(T_j) + E_j(T_i))$$

## Ph.D. Entrance Examination Probability and Stochastic Processes

*Answer five questions from the following six. Write the numbers of questions chosen on the cover of the answer book; otherwise only the first five answers will be graded.*

1) Suppose  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  be a probability space. Suppose that  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  is a function which assumes only countably many values  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$

a) Show that  $X$  is a random variable if and only if

$$X^{-1}(a_k) \in \mathcal{F} \text{ for all } k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

b) Suppose (1) holds. Show that

$$E[|X|] = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| P[X = a_k] \quad (2)$$

c) If (1) holds and  $E[|X|] < \infty$ , show that

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P[X = a_k]$$

d) If (1) holds and  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is measurable and bounded, show

$$E[f(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k) P[X = a_k]$$

2) For any  $r > 0$ ,  $E(|X|^r) < \infty$  if and only if

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P(|X| \geq n) < \infty$$

3) Let  $X_1, X_2, \dots$  be a nonnegative submartingale. Prove for every  $l > 0$

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{1 \leq j \leq n} X_j > l\right) &\leq \frac{1}{l} \int_{\{\sup_{1 \leq j \leq n} X_j > l\}} X_n dP \\ &\leq \frac{1}{l} E(X_n) \end{aligned}$$

- 4) Suppose  $p > 1$  and  $\{X_n\}$  be an  $\mathcal{L}^p$  martingale (and corresponding  $\sigma$ -fields  $\{\mathcal{F}_n\}$ ) ( $\sup_n \|X_n\|_{L^p} < \infty$ ). Then there is an  $X \in L^p$  such that

$$\forall n \geq 1 \quad X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_{L^p} = 0$$

- 5) Suppose that the number of phone calls to a delivery center in an interval with length  $t$  (minute),  $t > 0$ , is a poisson stochastic process with parameter  $\lambda = 3$ .

a) Suppose that from now on,  $T_1$  is the time of the first phone call,  $T_2$  the time between the second and the third call and  $T_7$  the time of the seventh phone call. Derive the distributions of each of these random variables.

b) Suppose that  $T_n$  is the time of the  $n$ -th call. Is this random variable continuous or discrete? If it is continuous derive its density function and if it is discrete find its probability function.

c) The following density function is given

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad (0 < x < 1)$$

where

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

If  $X$  is a random variable with the above density function for  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ , and  $Y$  is a binomial random variable with parameters  $p$  ( $0 < p < 1$ ) and  $n = 4$ . Show that

$$P(X \leq p) = P(Y \geq 2)$$

- 6) Let  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$  be an irreducible and homogenous Markov chain on a finite state space  $V = \{1, \dots, n\}$  with the transition matrix  $P = [p_{ij}]$ . If we know that

a)  $\forall i \in V \quad p_{ii} = 0$

b)  $\forall i, j \in V \quad p_{ij} = 0 \Leftrightarrow p_{ji} = 0$

- c)  $p_{ij} = \frac{1}{d_i}$  in which  $d_i$  is the number of elements in the set  $\{j \in V / p_{ij} \neq 0\}$   
if  $T_k = \min\{t \geq 0 / X_t = k\}$  is the random variable corresponding to the first hitting time to the state  $k$ , compute the following sum,

$$1/2 \sum_{i,j \in V} (E_i(T_j) + E_j(T_i)).$$