بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۸۲/۲/۲۶**
موضوع امتحان: **توپولوژی ـ هندسه**

از ده سوال داده شده شش سوال را به میل خود انتخاب کرده پاسخ دهید. شماره سوالهای انتخاب شده را روی برگه امتحانی بنویسید. اگر شماره سوالهای انتخاب شده ذکر نشده باشد فقط به شش پاسخ اول نمره داده می‌شود.

۱ــ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاوسدرف با ویژگی زیر باشد: دنباله‌ای (X_n) از زیرمجموعه‌های بستهٔ X وجود دارد که $X = \cup X_n, X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots$، و شرطی لازم و کافی برای بسته بودن یک زیرمجموعهٔ A از X این است که $A \cap X_i$، به‌ازای هر i، زیرمجموعهٔ بستهٔ X_i باشد. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ X بتمامی در یک X_n قرار می‌گیرد.

۲ــ فرض کنید $C \subset \mathbb{R}^2$ یک خم هموار بستهٔ منظم دوبار مشتق‌پذیری باشد که در درون گوی واحد $\mathbb{R}^2$ قرار دارد. نشان دهید (قدر مطلق) انحنای C در دست کم یک نقطه بزرگتر یا مساوی ۱ است.

۳ــ U یک زیرمجموعهٔ باز و همبند از $\mathbb{R}^n$ است و $f : U \to U$ یک نگاشت هموار که $f \circ f = f$.

الف) نشان دهید به‌ازای هر x در U داریم $rank(Df(x)) + rank(I - Df(x)) = n$ که در اینجا I نگاشت همانی است.

ب) ثابت کنید $f(U)$ یک زیرخمینهٔ هموار U است.

۴ــ $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع هموار همه‌جا مثبت هستند. میدانهای برداری زیر روی $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید:

$$X(x,y) = f(y)\frac{\partial}{\partial x},\ Y(x,y) = g(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

شرطی لازم و کافی ارائه کنید که وابرریختی هموار $H:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ وجود داشته باشد به‌طوریکه:

$$H_*(\frac{\partial}{\partial x})=X,\ H_*(\frac{\partial}{\partial y})=Y$$

۵– روی دایره واحد در صفحه (به‌عنوان زیرخمینهٔ $\mathbb{R}^۲$) یک ۱–فرم مثال بزنید که بسته باشد ولی دقیق نباشد. مثال خود را به‌طور دقیق و صریح تعریف و بررسی کنید.

۶– فرض کنید M یک خمینهٔ هموار است. نشان دهید TM (کلاف مماس M) جهت‌پذیر است.

۷– فضای پوششی $p:(\tilde{X},\tilde{x}_۰)\longrightarrow(X,x_۰)$ در شکل ۱ صفحه ضمیمه نمایش داده شده است.

الف) گروه تبدیلات پوششی را محاسبه کنید. آیا این پوشش یک پوشش نرمال (منظم) است؟

ب) زیرگروه $p_*\pi_۱(\tilde{X},\tilde{x}_۰)$ از $\pi_۱(X,x_۰)$ را برحسب مولدهای a و b توصیف کنید.

۸– فضای X با حذف کردن دو نقطهٔ متمایز از چنبرهٔ دوبعدی به‌دست آمده است. گروه بنیادی X را محاسبه کنید

۹– فضای Q از انطباق سه یال ۲–سادک به طریق شکل ۲ صفحه ضمیمه به‌دست آمده است. گروههای همولوژی Q را محاسبه کنید.

۱۰– یک گوی بسته در چنبرهٔ دوبعدی در نظر می‌گیریم و درون گوی را از چنبره حذف می‌کنیم. فضای باقیمانده را به X نمایش می‌دهیم. نشان دهید ∂X، مرز X، یک توکش X نیست. (شکل ۳ صفحه ضمیمه)

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Geometry - Topology

Answer six questions from the following ten. Write the numbers of questions chosen on the cover of the answer book; otherwise only the first six answers will be graded.

1) Let X be a Hausdroff topological space with the following property:

There exists a sequence (X_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, of closed subsets of X such that $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots$, $\cup X_n = X$, and a necessary and sufficient condition for a subset A of X to be closed is that $A \cap X_n$ be a closed subset of X_n. Prove that every compact subset of X is entirely contained in some X_n.

2) Let C be a closed, regular, twice-differentiable curve in $\mathbb{R}^2$ which is contained in the interior of the unit disc. Show that the (absolute value) of the curvature of C cannot be strictly less than one everywhere.

3) U is an open connected subspace of $\mathbb{R}^n$ and $f : U \to U$ is a smooth map with the property $f \circ f = f$.

a) Show that for every $x \in U$, we have:

$$rank(Df(x)) + rank(I - Df(x)) = n$$

where I is the identity map of $\mathbb{R}^n$.

b) Prove that $f(U)$ is a smooth submanifold of U.

4) Let $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be smooth everywhere positive functions. Consider the following vector fields on $\mathbb{R}^2$:

$$X(x,y) = f(y)\frac{\partial}{\partial x},\ Y(x,y) = g(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

Find a necessary and sufficient condition for the existence of a diffeomorphism $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ such that

$$H_*(\frac{\partial}{\partial x}) = X, \ H_*(\frac{\partial}{\partial y}) = Y$$

5) Give an example of a closed non-exact one-form on the unit circle (as a submanifold of $\mathbb{R}^2$). Define your example explicitly and prove its properties.

6) Let M be a smooth manifold. Show that TM, the tangent-bundle of M, is orientable.

7) The covering space $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_\circ) \longrightarrow (X, x_\circ)$ is depicted in figure 1.

a) Compute the group of covering (deck) transformations of this covering. Is this a normal (regular) cover?

b) Describe the subgroup $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_\circ)$ as a subgroup of $\pi_1(X, x_\circ)$ with respect to the generators a and b.

8) The space X is obtained from the 2-torus by deleting 2 distinct points. Compute the fundamental group of X.

9) The space Q is obtained from the 2-simplex by identifying the edges as shown in figure 2. Compute the homology groups of Q.

10) Consider a closed 2-disc on the 2-torus and remove its interior. Let X be the remaining space. Show that ∂X, the boundary of X, is not a retract of Z (figure 3).