بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۸۴/۲/۲۹**
موضوع امتحان: جبر

• **در سوالات زیر تمام حلقه‌ها جابه‌جایی و یکدار و مدولها یکانی‌اند و ارزش تمامی سوالات با هم برابر می‌باشد.**

۱− فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. ثابت کنید دقیقاً یک گروه از مرتبهٔ n (در حد یکریختی) وجود دارد اگر و تنها اگر n خالی از مربع باشد و برای هر دو شمارندهٔ اول p و q از n، $p \not\equiv 1 \pmod q$.

۲− فرض کنید R یک حلقهٔ ناشمارا باشد با این ویژگی که برای هر ایده‌آل غیرصفر I از R، R/I شماراست. ثابت کنید

الف) هر ایده‌آل غیرصفر I از R ناشماراست.

ب) R حوزه صحیح است.

۳− فرض کنید R یک حلقه باشد و M یک $R-$ مدول آزاد. اگر X و Y دو پایه برای M روی R باشند ثابت کنید $|X| = |Y|$.

۴− فرض کنید R یک حلقه باشد و M یک $R-$ مدول که هم آرتینی است و هم نوتری. فرض کنید $f \in \mathrm{End}_R(M)$. ثابت کنید زیرمدول‌های $f-$ پایای M_0 و M_1 از M وجود دارند با این ویژگی که $M = M_0 \oplus M_1$، و نیز $f|_{M_0} : M_0 \to M_0$ پوچ‌توان و $f|_{M_1} : M_1 \to M_1$ یکریختی است.

۵− فرض کنید R یک حلقهٔ موضعیِ نوتری با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد. ثابت کنید دقیقاً یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

الف) $\forall n \geq 1, \quad \mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1},$

ب) $\exists n \geq 1, \quad \mathfrak{m}^n = o.$

به علاوه نشان دهید در حالت (ب)، $\mathfrak{m}$ تنها ایده‌آل اول R است.

۶− فرض کنید $f : R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد و M یک $S-$مدول. نشان دهید

الف) M را می‌توان از طریق f به عنوان یک $R-$مدول در نظر گرفت.

ب) یک $R-$همریختی یک به یک $g : M \to S \otimes_R M$ موجود است.

آیا لزوماً هر چنین $R-$ همریختی g پوشاست؟

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Algebra

- **In the following questions all rings are commutative with unity.**

1) Let n be a natural number. Prove that there is only one group of order n (up to isomorphism) if and only if n is square-free and for each pair of primes p, q dividing n, $p \not\equiv 1 \pmod{q}$.

2) Let R be an uncountable ring such that for each non-zero ideal I of R, R/I is countable. Show that

a) each non-zero ideal I of R is uncountable.

b) R is an integral domain.

3) Given a ring R, let M be a free R-module. Prove that for any two bases X and Y for M over R, we have $|X| = |Y|$.

4) Given a ring R, let M be an R-module which is both Noetherian and Artinian. Assume that $f \in \mathrm{End}_R(M)$. Prove that there exist f-invariant submodules M_0 and M_1 of M such that $M = M_0 \oplus M_1$ with $f|_{M_0} : M_0 \to M_0$ nilpotent and $f|_{M_1} : M_1 \to M_1$ an isomorphism.

5) Let R be a Noetherian local ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$. Show that exactly one of the following two cases occur:

a) $\forall n \geq 1, \quad \mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$,

b) $\exists n \geq 1, \quad \mathfrak{m}^n = 0$.

Moreover, show that in case (b), $\mathfrak{m}$ is the only prime ideal of R.

6) Let $f : R \to S$ be a ring homomorphism and M an S-module. Show that

a) M can be viewed as an R-module via f.

b) There exists an injective R-module homomorphism $g : M \to S \otimes_R M$.

Is such R-homomorphism g necessarily surjective?