بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۳/۲/۳۱
موضوع امتحان: آنالیز

۱– فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته و عدد $\lambda>1$ چنان موجود است که

$$\forall x,y\in\mathbb{R}: \quad |f(y)-f(x)|\geq \lambda|y-x|$$

ثابت کنید f دارای نقطه ثابت منحصر به‌فردی است.

۲– فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی دلخواه باشد. دنباله توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\forall x\in[0,1]: \quad f_n(x)=f(x^n) \quad n=1,2,3,\dots$$

شرطی لازم و کافی روی f بیابید که دنباله توابع $\{f_n\}$ هم پیوسته (equicontinuous) گردند.

۳– فرض کنید E یک فضای باناخ روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد. صورت تعمیم یافته قضیه لیوویل به فرم زیر را ثابت نمایید:

فرض کنید $u:\mathbb{C}\to E$ یک نگاشت با این خاصیت باشد که برای هر $f\in E^*$ (دوگان E) نگاشت $f\circ u:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ یک نگاشت تحلیلی باشد. ثابت کنید اگر u کراندار باشد در این صورت u ثابت است.

راهنمایی: قضیه هان – باناخ را در نظر داشته باشید.

۴– فرض کنید $[0,1]$ مجهز به اندازه لبگ باشد. با ارائه مثال، نشان دهید که همگرایی در اندازه لبگ روی $[0,1]$ همگرایی در $L^1[0,1]$ را نتیجه نمی‌دهد. همچنین، همگرایی در $L^1[0,1]$ همگرایی تقریباً همه جا را نتیجه نمی‌دهد.

۵− افراز $\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1\}$ از بازه $[0,1]$ را در نظر بگیرید و تابع $r_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$r_n(1) = -1$$

$$r_n(x) = (-1)^{k-1}, \qquad \frac{k-1}{2^n} \leq x < \frac{k}{2^n}$$

برای $k = 1, 2, \dots, 2^n$. ثابت کنید که برای تابع انتگرال‌پذیر $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (روی $[0,1]$ اندازه لبگ را در نظر گرفته‌ایم) داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 r_n(x) f(x) dx = 0$$

٦− فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه و $f_n : X \to \mathbb{R}$ یک دنباله از توابع نامنفی انتگرال‌پذیر روی X باشند به قسمی که $f_n \to f$ تقریباً همه جا و همچنین $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu < \infty$. نشان دهید که برای هر مجموعه اندازه‌پذیر E داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Analysis

1) Let $f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a continuous function and suppose $\lambda>1$ is such that

$$|f(x)-f(y)|\ \geq\ \lambda|x-y| \qquad \text{(for all } x \text{ and } y\text{)}.$$

Show that there exists a unique fixed point for f.

2) Let $f\,:\,[0\,,\,1]\to\mathbb{R}$ be a given function. Consider the sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ of functions on $[0\,,\,1]$ defined by

$$f_n(x)=f(x^n) \qquad (x\in[0\,,\,1]).$$

Find a necessary and sufficient condition on f such that $\{f_n\}$ is equicontinuous on $[0\,,\,1]$.

3) Let E be a Banach space over the complex field $\mathbb{C}$. Prove the following generalization of the Liouville's Theorem:

Let $u\,:\,\mathbb{C}\to E$ be a mapping with the property that for every $f\in E^*$ (dual of E) the composition $f\circ u\,:\,\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ be an analytic function. Prove that if u is bounded, then it must be constant.

Hint: Apply the Hahn-Banach Theorem.

4) Equip $[0\,,\,1]$ with the Lebesgue measure. By providing an example, show that the convergence in measure on $[0\,,1]$ does not necessarily imply the convergence in $L^1[0\,,\,1]$. Also provide an example showing that the convergence in $L^1[0\,,\,1]$ does not imply the almost everywhere convergence.

5) Considering the partition $\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1\}$ of $[0, 1]$, define the function r_n : $[0, 1] \to \mathbb{R}$ by

$$\begin{aligned} r_n(1) &= -1 \\ r_n(x) &= (-1)^{k-1} \qquad \left(\text{for } \frac{k-1}{2^n} \leq x < \frac{k}{2^n} \text{ and } k = 1, 2, \dots, 2^n\right). \end{aligned}$$

Taking the Lebesgue integral on $[0, 1]$, show that for every integrable function f : $[0, 1] \to \mathbb{R}$ we have

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 r_n(x)\, f(x)\, dx = 0.$$

6) Let (X, μ) be a measure space and let $f_n : X \to \mathbb{R}$ be a sequence of non-negative integrable functions on X such that $f_n \to f$ almost everywhere and that

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu < \infty.$$

Show that for every μ-measurable set E we have

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu.$$