بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۸۴/۲/۲۹**
موضوع امتحان: آنالیز

۱– فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و تناوبی با دوره تناوب ۱ است. نشان دهید برای هر تابع پیوستهٔ $\phi:[0,1]\to\mathbb{R}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \phi(t)f(nt)dt=\left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 \phi(t)dt\right)$$

۲– فرض کنید μ یک اندازه بر فضای X باشد. فرض کنیم که تابع حقیقی $k(x,t)$ روی حاصلضرب $X\times]a,b[$ تعریف شده باشد. فرض کنید

الف) برای هر $t\in]a,b[$، تابع $k_t(x)=k(x,t)$ در $L^1(X)$ است

ب) تابع $\frac{\partial k}{\partial t}(x,t)$ بر $X\times]a,b[$ موجود است

پ) تابع $g\in L^1(X)$ موجود است که برای هر $(x,t)\in X\times]a,b[$ داریم $\left|\frac{\partial k}{\partial t}(x,t)\right|\le g(x)$.

نشان دهید که برای هر t ثابت، تابع $x\mapsto\frac{\partial k}{\partial t}(x,t)$ اندازه‌پذیر است و بعلاوه تابع $u(t)=\int_X k(x,t)\,d\mu(x)$ در هر نقطه $t_0\in]a,b[$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$u'(t_0)=\int_X \frac{\partial k}{\partial t}(x,t_0)\,d\mu(x)$$

۳− $[۰, ۱]$ با اندازه لبگ m روی آنرا در نظر بگیرید. فرض کنید $f_n : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر باشند.

الف) فرض کنید تابع اندازه‌پذیر $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ چنان موجود است که برای هر $\epsilon > ۰$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\{x \in [۰, ۱] : |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}\right) = ۰$$

ثابت کنید یک زیردنباله از $\{f_n\}$ چنان موجود است که تقریباً همه‌جا به f همگراست.

ب) فرض کنید تابع اندازه‌پذیر $f : [۰, ۱] \to \mathbb{R}$ چنان موجود است که

$$\lim_{n\to\infty} \int_۰^۱ |f_n - f| dm = ۰$$

ثابت کنید یک زیردنباله از $\{f_n\}$ چنان موجود است که تقریباً همه‌جا به f همگراست.

۴− فرض کنید X یک فضای باناخ و Y یک زیرفضای برداری بسته آن و $Y \neq X$. فرض کنید $۰ < r < ۱$، ثابت کنید عضو $x_۰ \in X$ موجود است بطوریکه $\|x_۰\| = ۱$ و $r \leq d(x_۰, Y) \leq ۱$ (که در آن $d(x_۰, Y) = \inf_{y\in Y} d(x_۰, y)$).

۵− فرض کنید X یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر با اندازه لبگ ۱ در فضای $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ تابعی انتگرال‌پذیر باشد. ثابت کنید:

$\int_X f(x)\, dx = ۰$ اگر و تنها اگر $\int_X |۱ + tf(x)|\, dx \geq ۱$ برای هر $t \in \mathbb{R}$.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Analysis

1) Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be 1-periodic and continuous. Show that for every continuous function $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, we have:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi(t) f(nt) dt = \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 \phi(t) dt \right)$$

2) Let μ be a measure on X. Assume a real-valued function $k(x,t)$ on the product space $X \times]a,b[$. Suppose

a) For each $t \in]a,b[$, the function $k_t(x) = k(x,t)$ is in $L^1(X)$.

b) The function $\frac{\partial k}{\partial t}(x,t)$ exists on $X \times]a,b[$.

c) There exists $g \in L^1(X)$ such that for all $(x,t) \in X \times]a,b[$ we have $\left| \frac{\partial k}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x)$.

Show that under these three conditions, for each fixed t the function $x \mapsto \frac{\partial k}{\partial t}(x,t)$ is measurable and further the function $u(t) = \int_X k(x,t)\, d\mu(x)$ is differentiable at each $t_0 \in]a,b[$ and that

$$u'(t_0) = \int_X \frac{\partial k}{\partial t}(x, t_0)\, d\mu(x)$$

3) Consider [0,1] with Lebegue measure m on it. Suppose that $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ are a sequence of measuerable functions;

a) Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a measurable function such that for any $\epsilon > 0$, we have

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\{x \in [0,1] : |\mathrm{f(x) - f_n(x)}| \geq \epsilon\}\right) = 0$$

Show that there is a subsequence of $\{f_n\}$ which converges to f a.e.

b) Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a measueable function such that

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$$

Show that there is a subsequence of $\{f_n\}$ which converges to f a.e.

4) Let X be a Banach space and Y a closed linear subspace of X with $Y \neq X$. Let $0 <$ r < 1. Prove that there exists $x_0 \in X$ such that $\|x_0\| = 1$, and $r \leq d(x_0, Y) \leq 1$ (where $d(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} d(x_0, y)$).

5) Let X be a measueable subset of $\mathbb{R}$ with Lebesgue measure 1. Suppose f is a real-valued intergrable function on X. Show that the relation $\int_X f(x)\, dx = 0$ holds if and only if $\int_X |1 + tf(x)|\, dx \geq 1$ holds for every real number t.