

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۴/۲/۳۰
موضوع امتحان: ترکیبیات

۱- اگر G یک گراف ساده با ماکزیمم درجه Δ و عدد رنگی یالی χ' باشد، نشان دهید، $\Delta \leq \chi' \leq 2\Delta$. همچنین خانواده نامتناهی از گرافهای ساده مثل $\{G_n\}$ را ارائه دهید به طوری که $|V(G_n)| \rightarrow \infty$ و $\chi'(G_n) = \Delta(G_n)$.

۲- ماتریس A را تصادفی دوگانه گوئیم هرگاه درایه‌های آن اعداد حقیقی نامنفی بوده و حاصل جمع هر سطر و هر ستون آن برابر ۱ باشد. ثابت کنید که برای هر ماتریس تصادفی دوگانه A ، پرمینت ماتریس A یک عدد ناصفر مثبت است، یعنی $\text{per}(A) > 0$.

۳- می‌خواهیم دو مربع لاتین L_1 و L_2 از اندازه n را روی مجموعه $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ چنان بنا کنیم که دقیقاً در $2n$ جا با هم اختلاف داشته باشند به طوری که

الف) هر دو سطر دقیقاً در دو جا با هم متفاوت باشند،

ب) هر دو ستون دقیقاً در دو جا با هم متفاوت باشند،

ج) هر عضو از اعضای N نیز دقیقاً در دو جا که L_1 و L_2 با هم اختلاف دارند، ظاهر شود.

همه مقادیر n که برای آنها چنین مربع‌های لاتین وجود دارند را تعیین کنید.

۴- یک طرح بلوکی دوتائی-متعادل (PBD) عبارت است از زوج مرتب (S, B) که در آن S یک مجموعه متناهی از علائم بوده و B خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های S به نام بلوک‌ها است به طوری

که هر جفت از اعضای متمایز S دقیقاً در λ بلوک با هم ظاهر می‌شوند. ثابت کنید که در هر PBD که در آن اندازه هر بلوک کمتر از $|S|$ باشد، تعداد کل بلوک‌ها b ، حداقل $|S|$ است.

۵- ناحیه‌ای به مساحت n کیلومترمربع به دو طریق اختیاری به n قسمت مساوی مثلاً $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ و $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ تقسیم شده است. ثابت کنید که یک جایگشت σ روی $\{1, 2, \dots, n\}$ موجود است به طوری که به ازای هر i : $A_i \cap B_{\sigma(i)} \neq \emptyset$.

۶- اگر c یک $\chi(G)$ -رنگ آمیزی از گراف ساده G باشد، برای هر دو عدد i, j به طوری که $i \neq j$ و $1 \leq i, j \leq \chi(G)$ تعریف می‌کنیم:

$$n_{i,j}(c) = |\{v \in c^{-1}(i) \mid N_G(v) \cap c^{-1}(j) = \emptyset\}|,$$

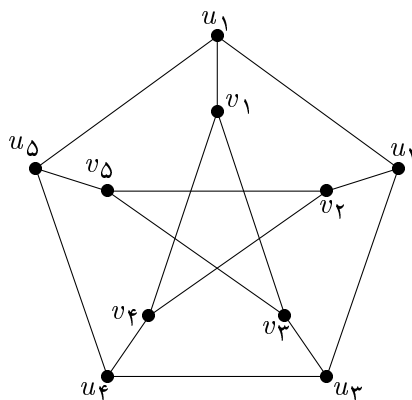
که در آن $N_G(v)$ مجموعه همسایگی‌های v در G است. همچنین تعریف می‌کنیم:

$$\xi(G) = \max_{c \in C} \max_{1 \leq i \neq j \leq \chi(G)} n_{i,j}(c),$$

که در آن C مجموعه تمام $\chi(G)$ -رنگ آمیزی‌های G است.

الف) اگر G یک گراف راس-بحرانی با عدد استقلال $\alpha(G) = 5$ باشد، یک کران بالا برای $\xi(G)$ ارائه کنید. (کرانهای بهتر نمره بیشتری دارند)

ب) مقدار $\xi(P)$ را برای گراف پیترسن (شکل زیر) بیابید.



ج) در رد یا اثبات درستی حدس زیر هرچه می‌دانید ارائه کنید:

« برای هر گراف یال-بحرانی G داریم $\xi(G) = \alpha(G) - 1$. »

Ph.D. Entrance Examination

All answers must be supported by appropriate reasoning, proofs or counter-examples.

(10 points) P1. Let G be a simple graph with maximum degree Δ and the edge-chromatic number χ' . Prove that $\Delta \leq \chi' \leq 2\Delta$. Also, construct an infinite family of simple graphs $\{G_n\}$ such that $|V(G_n)| \rightarrow \infty$ and $\chi'(G_n) = \Delta(G_n)$.

(10 points) P2. A matrix A is said to be *doubly stochastic* if its entries are non-negative real numbers and its row sums and column sums are equal to 1. Prove that the permanent of any doubly stochastic matrix A is a nonzero positive number, i.e. $\text{per}(A) > 0$.

(10 points) P3. We want to construct two Latin squares L_1 and L_2 , of order n and on symbols $N = \{1, 2, \dots, n\}$ that differ in exactly in $2n$ cells, such that

- (a) in each row they differ in exactly 2 places,
- (b) in each column they differ in exactly 2 places,
- (c) also each element of N appears in exactly 2 cells where L_1 and L_2 differ.

Determine the values of n for which such a pair of Latin squares exist.

(10 points) P4. A *pairwise balanced block design* (PBD) is an ordered pair (S, \mathcal{B}) , where S is a finite set of symbols, and \mathcal{B} is a collection of subsets of S called *blocks*, such that each pair of distinct elements of S occurs together in exactly λ blocks of \mathcal{B} . Prove that in any PBD, where each block size is less than $|S|$, the number of blocks b , is at least $|S|$.

(10 points) P5. A region of area n square kilometers is divided into n equal-sized regions in two arbitrary ways, say $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ and $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$. Prove that there exists a permutation σ on $\{1, 2, \dots, n\}$ such that for each i , $A_i \cap B_{\sigma(i)} \neq \emptyset$.

(10 points) P6. Let σ be a $\chi(G)$ -coloring of a simple graph G . For any pair of integers i, j such that $i \neq j$ and $1 \leq i, j \leq \chi(G)$ we define

$$n_{i,j}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} |\{v \in \sigma^{-1}(i) \mid N_G(v) \cap \sigma^{-1}(j) = \emptyset\}|,$$

where $N_G(v) \subset V(G)$ is the neighborhood of v in G . Also, we define,

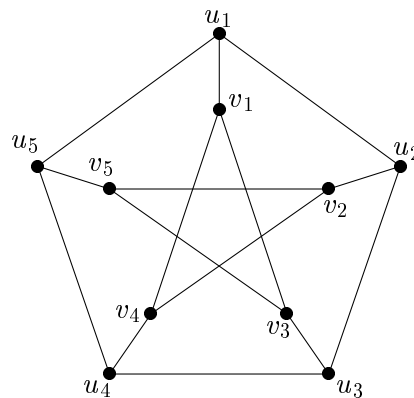
$$\xi(G) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\sigma \in \mathcal{C}} \max_{1 \leq i \neq j \leq \chi(G)} n_{i,j}(\sigma).$$

where \mathcal{C} is the class of all $\chi(G)$ -colorings of G .

a) Let G be a vertex-colour-critical graph with the independence number $\alpha(G) = 5$.

Obtain an upper bound for $\xi(G)$. (Better bounds have more credit).

b) Compute $\xi(P)$ where P is the Petersen graph (Figure ??).



1: The Petersen graph P .

c) What can you say, in favor of or against, the following conjecture?

For any simple edge-colour-critical graph G we have $\xi(G) = \alpha(G) - 1$.