بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **شنبه ۸۳/۳/۲**
موضوع امتحان: **نظریه علوم کامپیوتر**

کلیه پاسخها باید مستدل و با ارائه دلایل کافی باشند.

(۱۲ نمره) ۱−

(۲ نمره) الف) اثبات یا رد کنید: برای هر زبان منظم L، یک اتوماتون غیرقطعی متناهی مثل N (بدون انتقال بلادرنگ) وجود دارد چنانکه N فقط یک حالت پذیرش داشته و $L(N) = L$.

(۱۰ نمره) ب) زبان منظم $L \subseteq \{۰,۱\}^*$ را **۱ـمنظم** می‌نامیم اگر

$$\forall\, x,y,z \in \{۰,۱\}^* \quad (x \in L \;\&\; y \in L \;\&\; xz \in L) \Rightarrow yz \in L.$$

ثابت کنید که هر زبان منظم را می‌توان به صورت اجتماعی متناهی از زبانهای ۱ـمنظم بیان کرد.

(۱۲ نمره) ۲− فرض کنید $\Sigma \stackrel{def}{=} \{۰,۱,+,=\}$ و زبان $L \subseteq \Sigma^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$L \stackrel{def}{=} \{x+y=z \;\mid\; x,y,z \in \{۰,۱\}^* \;\;\&\;\; x+y=z \text{ به عنوان اعداد دودویی } \}.$$

(مثلاً داریم $۰۱۰۰ = ۱ + ۱۱ \in L$ ولی $۱۱ + ۱۱ = ۱۱۱ \notin L$).

(۴ نمره) الف) آیا L یک زبان منظم است؟

(۸ نمره) ب) آیا L یک زبان مستقل از متن است؟

(۱۲ نمره) ۳− فرض کنید L زبان مستقل از متنی باشد که توسط گرامر زیر تولد می‌شود.

$$S \longrightarrow 0 \mid 0S \mid S0 \mid 1SS \mid S1S \mid SS1,$$

که در آن S متغیر شروع و $\{0, 1\}$ مجموعهٔ حروف نهایی است. ثابت کنید

$$\forall\, x \in L \quad |x|_0 > |x|_1,$$

که در آن $|x|_i$ تعداد دفعات ظاهر شدن حرف i در کلمه x است.

(۱۲ نمره) ۴− اگر $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ یک زبان منظم و $L_1 \leq_m L_2$ که در آن $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ و $\leq_m$ همان تحول عادی چندبه‌یک است، آیا می‌توان لزوماً نتیجه گرفت که L_1 نیز یک زبان منظم است؟ (چرا؟)

(۱۲ نمره) ۵− در مورد تصمیم‌پذیری مسائل زیر بحث کنید:

(۳ نمره) الف) برای الگوریتم داده شده A و کلمه داده شده x، « آیا A در روند محاسبه x در ۲۰ مرحله اول محاسبه متوقف می‌شود؟»

(۳ نمره) ب) فرض کنید P یک خاصیت دلخواه از زبانهای در Σ^* باشد. برای ماشین تورینگ داده شده T، «آیا $L(T)$ دارای خاصیت P است؟»

(٦ نمره) ج) برای زبانهای داده شده $L_1, L_2 \in \Sigma^*$ که در آن L_1 منظم و L_2 مستقل از متن هستند، « آیا $L_1 \cap L_2$ ناتهی است؟» (یعنی آیا $L_1 \cap L_2 \neq \phi$ صحیح است؟).

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Computer Science

All answers must be supported by appropriate reasoning, proofs or counter-examples.

(12 points) P1.

(2 points) a. *Prove* or *disprove*: For every *regular* language L there exists a *nondeterministic finite automaton* N (without any λ-transition), such that N has a *unique* accepting state and $L(N) = L$.

(10 points) b. Let us call a regular language $L \subseteq \{0,1\}^*$ 1-*regular* if

$$\forall\, x, y, z \in \{0,1\}^* \quad (\mathrm{x} \in \mathrm{L}\ \&\ \mathrm{y} \in \mathrm{L}\ \&\ \mathrm{xz} \in \mathrm{L}) \Rightarrow \mathrm{yz} \in \mathrm{L}.$$

Prove that *every* regular language is a finite union of 1-regular languages.

(12 points) P2. Let $\Sigma = \{0, 1, +, =\}$ and define the language $L \subseteq \Sigma^*$ as follows,

$$L = \{x + y = z \ \mid\ x, y, z \in \{0,1\}^* \ \ \&\ \ \mathrm{x} + \mathrm{y} = \mathrm{z} \text{ as binary numbers}\}.$$

(e.g. we have $11 + 1 = 0100 \in \mathrm{L}$ but $11 + 11 = 111 \notin \mathrm{L}$.)

(4 points) a. Is L a *regular* language? (why?)

(8 points) b. Is L a *context free* language? (why?).

(12 points) P3. Let L be the context free language generated by the following grammar,

$$S \longrightarrow 0 \mid 0\mathrm{S} \mid \mathrm{S}0 \mid 1\mathrm{SS} \mid \mathrm{S}1\mathrm{S} \mid \mathrm{SS}1,$$

in which S is the start variable and $\{0,1\}$ is the set of terminals. Prove that

$$\forall\, x \in L \quad |x|_0 > |x|_1,$$

where $|x|_i$ is the number of times the symbol i occurs in x.

(12 points) P4. Let $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ be a *regular* language and $L_1 \leq_m L_2$, where $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ and $\leq_m$ is *the* many-to-one reduction. Is L_1 necessarily a *regular* language? (why?)

(12 points) P5. *Discuss* the *decidability* of the following problems:

(3 points) a. For a given algorithm A and a given input x, "*does A stops within the first* 20 *steps of its computation on the input x?*"

(3 points) b. Assume that P is an *arbitrary* property of languages in Σ^*. Given a Turing machine T, "*does $L(T)$ have property P?*""

(6 points) c. Given $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, where L_1 is *regular* and L_2 is *context free*, "*is $L_1 \cap L_2$ a nonvoid set?*" (i.e. is it true that $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$?)