

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۴/۲/۲۹

موضوع امتحان: علوم کامپیوتر

۱- اگر L, M و K زبانهای روی الفبای Σ باشند و تعریف کنیم،

$$LK^{-1} = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in K \quad xy \in L\},$$

آنگاه در مورد درستی یا نادرستی تساویهای زیر بحث کنید،

$$a) (L \cup M)K^{-1} = LK^{-1} \cup MK^{-1} \quad b) (L \cap M)K^{-1} = LK^{-1} \cap MK^{-1}.$$

۲- اگر x و y کلماتی در Σ^* باشند، در مورد معادل بودن یا معادل نبودن گزاره‌های زیر بحث کنید.

الف) اعداد طبیعی m و n وجود دارند به طوری که x^m و y^n یک پیشوند مشترک با طول $|x| + |y|$ دارند.

$$xy = yx \quad (\text{ب})$$

ج) کلمه $z \in \Sigma^*$ و اعداد طبیعی p و q وجود دارند به طوری که $x = z^p$ و $y = z^q$.

۳- آیا زبان $L = \{0, 1\}^* - \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ یک زبان مستقل از متن است؟ (چرا؟)

۴- گرامر $G = (A_N, A_T, S, P)$ را نوعی می‌نامیم اگر

الف) برای هر قانون $\alpha \rightarrow \beta \in P$ که در آن $|\beta| < |\alpha|$ داشته باشیم $\alpha = X \in A_N$ و $\beta = \lambda$ (کلمه پوچ است)

ب) برای هر قانون $\alpha \rightarrow \beta \in P$ داشته باشیم $|\beta| \leq 2$

آیا برای هر گرامر داده شده می توان یک گرامر نوعی معادل ارائه کرد؟ (چرا؟)

۵- اگر $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک شمارش از ماشینهای تورینگ و $\langle n \rangle$ نمایش باینری عدد n باشند، آیا زبان زیر تصمیم پذیر است؟

$$L = \{\langle n \rangle \mid L(T_n) \text{ نامتناهی است}\}$$

۶- اگر $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ یک تابع بازگشتی جزئی و $c \notin \Sigma$ یک نماد باشند، آیا زبان $L = \{xcf(x) \mid x \in \text{Dom}(f)\}$ یک زبان r.e. است؟ (چرا؟)

Ph.D. Entrance Examination

All answers must be supported by appropriate reasoning, proofs or counter-examples.

(10 points) P1. Let L , M and K be two languages over an alphabet Σ . Define,

$$LK^{-1} = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in K \ xy \in L\}.$$

Prove or disprove:

$$a) (L \cup M)K^{-1} = LK^{-1} \cup MK^{-1} \qquad b) (L \cap M)K^{-1} = LK^{-1} \cap MK^{-1}.$$

(10 points) P2. Let x and y be two words in Σ^* . Determine whether the following three statements are equivalent.

- There exist $m, n \in \mathbf{N}$ such that the words x^m and y^n have a common prefix of length $|x| + |y|$.
- $xy = yx$.
- There exist $z \in \Sigma^*$ and $p, q \in \mathbf{N}$ such that $x = z^p$ and $y = z^q$.

(10 points) P3. Let $L = \{0, 1\}^* - \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$. Is L a context-free language? (why?)

(10 points) P4. A grammar $G = (A_N, A_T, S, P)$ is said to be *typical* if,

- If $\alpha \rightarrow \beta \in P$ and $|\beta| < |\alpha|$, then $\alpha = X \in A_N$ and $\beta = \lambda$ (λ is the empty word).
- For every production $\alpha \rightarrow \beta \in P$ we have $|\beta| \leq 2$.

Is it possible to transform any given grammar to an equivalent *typical* grammar?
(why?)

(10 points) P5. Let $\{T_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ be an enumeration of deterministic binary Turing machines, and let $\langle n \rangle$ be the binary representation of the natural number n . Determine whether the following language is recursive (decidable),

$$L = \{\langle n \rangle \mid L(T_n) \text{ is infinite}\}.$$

(10 points) P6. Let $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ be a partial recursive function and let $c \notin \Sigma$ be a symbol. Is the language $L = \{xcf(x) \mid x \in \text{Dom}(f)\}$ recursively enumerable? (why?)