بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **جمعه ۸۳/۳/۱**
موضوع امتحان: **معادلات دیفرانسیل**

۱ـ برای مسئله ذیل یک جواب تقریبی حاوی جملات از درجه سوم و بالاتر به‌دست آورید. در مورد قلمرو جواب دقیق مسئله نیز اظهار نظر کنید.

$$\frac{dx}{dt} = x + y^2 - 1 \qquad x(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = y + x^2 + 1 \qquad y(0) = 0$$

۲ـ نوع نقاط ایستا دستگاه معادلات ذیل را معین کنید و در مورد پایداری و رفتار جوابها در همسایگی آنها بحث کنید.

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - 4$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 - y^2 - 1$$

۳ـ در مورد وجود جوابهای تناوبی هر یک از دستگاه معادلات ذیل بحث کنید.

الف)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2 + \sin(x+y) + x \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2 + \sin(x+y) - x \end{cases}$$

ب)

$$\frac{dx}{dt} = -y - y^{۳}$$

$$\tfrac{dy}{dt} = x$$

ج)

$$\frac{dx}{dt} = -y + y^{۴}$$

$$\tfrac{dy}{dt} = x$$

۴– معادله دیفرانسیل پاره‌ای خطی بیضوی $\sum\limits_{|\alpha|=۲} a_\alpha D^\alpha u = f$ با ضرایب ثابت را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{۲})$ و u یک جواب توزیع آن است. ثابت کنید $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{۲})$.

۵– فرض کنید $D = \mathbb{R}^n \times [\circ, \infty)$ و $u \in C(\bar{D} \cap C^{۲}(D))$ یک جواب معادله $u_t = c^{۲} u_{xx}$ است. اگر $\sup\limits_{\overline{D}} u < \infty$. ثابت کنید $\sup\limits_{\overline{D}} u(x,t) = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,\circ)$.

٦– فرض کنید در مسئله زیر کلیه توابع دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته‌اند. ثابت کنید این مسئله حداکثر دارای یک جواب است.

$$u_{tt} = c^{۲} u_{xx} + \phi(x,t)$$

$$u(x,\circ) = \alpha(x), \qquad u_t(x,\circ) = \beta(x) \qquad\qquad \begin{matrix} a \le x < b \\ \circ \le t \end{matrix}$$

$$u(a,t) = a(t), \qquad u_x(b,t) = b(t)$$

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Differential Equation

1) Find an approximate solution for the following system of differential equations with third degree terms or higher. What can you say about the domain of the exact solution?

$$\frac{dx}{dt} = x + y^2 - 1 \qquad x(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = y + x^2 + 1 \qquad y(0) = 0$$

2) Find the equilibruin points of the following system. Discuss the stability and behavior of the solution in the neighborhood of the critical points.

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - 4$$
$$\frac{dy}{dt} = x^2 - y^2 - 1$$

3) Discuss the existence of the periodic solutions of the following three systems

a)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2 + \sin(x+y) + x \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2 + \sin(x+y) - x \end{cases}$$

b)

$$\frac{dx}{dt} = -y - y^3$$

$$\tfrac{dy}{dt} = x$$

c)

$$\frac{dx}{dt} = -y + y^4$$

$$\tfrac{dy}{dt} = x$$

4) Consider the linear elliptic PDE with constant coefficients

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha D^\alpha u = f$$

Assuming $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ and u is a distribution solution, prove $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

5) Let $u \in C(\bar{D} \cap C^2(D)$, $D = \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ be a solution of $u_t = c^2 u_{xx}$. Now if $\sup\limits_{\overline{D}} u < \infty$ show $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} u(x, 0) = \sup\limits_{\overline{D}} u(x, t)$.

6) Assume the function appearing in the following problem have continuous second order derivitives. Prove this problem has at most one solution.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \phi(x, t)$$

$$u(x, 0) = \alpha(x), \quad u_t(x, 0) = \beta(x) \qquad \begin{array}{l} a \le x < b \\ 0 \le t \end{array}$$

$$u(a, t) = a(t), \quad u_x(b, t) = b(t)$$