بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۸۴/۲/۳۰**
موضوع امتحان: **معادلات دیفرانسیل**

۱− در مورد پایداری و ناپایداری نقاط ساکن دستگاه معادلات زیر بحث کنید

$$\frac{dx}{dt} = x^{3} - y^{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2xy^{2} + 4x^{2}y + 2y^{3}$$

۲− مسائل زیر را حل کنید $(t > 0,\ -\infty < x, y < +\infty)$

(الف) $\begin{cases} x^{2}u_x + y^{2}u_y = u^{2} \\ u = 1, \quad y = 2x \text{ روی} \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-x^{2}} \\ u(x, 0) = e^{-|x|} \end{cases}$

۳− دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = Ax + f(t, x)$$

که در آن A یک ماتریس $n \times n$ است که کلیه مقادیر ویژه آن دارای قسمت حقیقی منفی می‌باشند و $f(t, x)$ دارای مشتق مرتبه اول پیوسته می‌باشد و $|f(t, x)| \leq \frac{|x|^{2}}{1+t^{2}+|x|^{2}}$. نشان دهید $x = 0$ پایدار مجانبی است.

۴− ثابت کنید $(4\pi|x|)^{-1}e^{-c|x|}$ جواب اساسی $-\triangle + c^{2}$ در $\mathbb{R}^{3}$ است که در آن c یک ثابت است.

۵− اگر $r(t)$ یک تابع حقیقی پیوسته باشد و $\int_0^\infty |r(t)dt < \infty$ نشان دهید معادله

$$\ddot{x} + (1 + r(t))x = 0$$

دارای جوابی مانند $\phi(t)$ است بطوریکه

$$\lim_{t\to\infty}[\phi(t) - e^{it}] = 0, \qquad \lim_{t\to\infty}[\phi'(t) - ie^{it}] = 0$$

٦− فرض کنید $u(x,y,t)$ جواب مسئله زیر است

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \qquad t \geq 0, \qquad x^2 + y^2 \leq 1$$

$$u(x,y,t) = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

ثابت کنید $\iint_{x^2+y^2\leq 1} |u(x,y,t)|^2 dxdy$ نسبت به t غیرصعودی است.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Differential Equation

1) Discuss the stability of critical points of the system

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - y^3$$

$$\frac{dy}{dt} = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3$$

2) Solve the following problems $(t > 0,\ -\infty < x, y < +\infty)$

$$(a) \begin{cases} x^2u_x + y^2u_y = u^2 \\ u = 1, \quad y = 2x \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-x^2} \\ u(x,0) = e^{-|x|} \end{cases}$$

3) Consider the following system of equations

$$\dot{x} = Ax + f(t,x)$$

where A is on $n \times n$ matrix whose eigenvalues have negative real parts. If

$$|f(t,x)| \leq \frac{|x|^2}{1 + t^2 + |x|^2},$$

where f has continuous first order derivative. Show $x = 0$ is asymptotically stable.

4) Prove $(4\pi|x|)^{-1}e^{-c|x|}$, where c is a constant, is a fundamental solutions of $-\triangle + c^2$ on $\mathbb{R}^3$.

5) Suppose $r(t)$ is a real continuous function such that $\int_0^\infty |r(t)dt < \infty$, show the differential equation

$$\ddot{x} + (1 + r(t))x = 0$$

has a solutions $\phi(t)$ such that

$$\lim_{t\to\infty}[\phi(t) - e^{it}] = 0, \quad \lim_{t\to\infty}[\phi'(t) - ie^{it}] = 0$$

6) If $u(x, y, t)$ is a solution of the differential equation

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad t \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

$$u(x, y, t) = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$

Prove $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} |u(x, y, t)|^2 dxdy$ is decreasing with respect to t.