بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **جمعه ۸۳/۳/۱**
موضوع امتحان: **منطق ریاضی**

۱. **تعریف:** گروه $(G,*)$ ترتیب‌پذیر است هرگاه بتوان روی G یک ترتیب خطی مانند "$<$" تعریف کرد به‌طوری که $(G,*,<)$ یک گروه مرتب خطی باشد.
ثابت کنید $(G,*)$ ترتیب‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرگروه متناهیاً تولید شده آن ترتیب‌پذیر باشد.

۲. نشان دهید که در زبان $\mathcal{L}=\{+,\circ\}$، $\mathbb{Z}\not\equiv\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

۳. فرض کنید $\mathbf{M}=(\mathbb{Q},<)$ ساختار مرتب خطی چگال روی $\mathbb{Q}$ باشد. دنباله صعودی $a_1<a_2<a_3<\cdots$ را طوری در $\mathbb{Q}$ انتخاب کنید که $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.
ثابت کنید $T=Th(\mathbb{Q},<,a_1,a_2,a_3,\ldots)$ در زبان $\mathcal{L}=\{<,c_1,c_2,c_3,\ldots\}$ **دقیقاً** دارای سه مدل شماراست.

۴. احکام زیر را اگر درست است، ثابت کنید و در غیر این صورت مثال نقض ارایه کنید:

الف) یک نظریه مدل کامل مرتبه اول که مدل اول داشته باشد، کامل است.

ب) یک نظریه مرتبه اول که حذف سور را بپذیرد، تصمیم‌پذیر است.

۵. **تعریف:** (اصل انتخابهای وابسته:) فرض کنید R یک رابطه دوتایی روی مجموعه غیرتهی A باشد، و برای هر a در A، b در A موجود است که aRb. آنگاه دنباله $a_\circ$، a_1، a_2، ... در A موجود است که برای هر n در $\mathbb{N}$، a_nRa_{n+1}.
ثابت کنید اصل انتخاب شمارا از اصل انتخابهای وابسته نتیجه می‌شود.

۶. **تعریف:** مجموعه X را تعریف‌پذیر می‌گوییم اگر فرمول φ در زبان نظریه مجموعه‌ها $\mathcal{L}=\{\epsilon\}$ موجود باشد که $X=\{u:\varphi(u)\}$.
با فرض اینکه چنین نیست که هر عدد ترتیبی تعریف‌پذیر است، نشان دهید که خاصیت «X تعریف‌پذیر است» در زبان نظریه مجموعه‌ها قابل بیان نیست.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Mathematical Logic

1. **Definition:** A group $(G, *)$ is ordered if there is a linear order '$<$' on G such that $(G, *, <)$ is an ordered group.

   Prove that a group $(G, *)$ can be ordered if and only if every finitely generated subgroup of $(G, *)$ can be ordered.

2. Show that in the language $\mathcal{L} = \{+, .\}$, $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

3. Let $\mathbf{M} = (\mathbb{Q}, <)$ be the usual ordered structure of rationals. Choose $a_1, a_2, a_3 \ldots$ in $\mathbb{Q}$ such that $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$. Prove that $T = Th(\mathbb{Q}, <, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ has **exactly** three countable models, in the language $\mathcal{L} = \{<, c_1, c_2, c_3, \ldots\}$.

4. Of the following statements, if it is true, prove it, otherwise present a counterexample.

   a) every model-complete first order theory with a prime model, is complete.

   b) every first order theory which admits quantifier elimination, is decidable.

5. **Definition:** (Principle of dependent choices, DC): Suppose R is binary relation on a nonempty set A, and for every $a \in A$ there is $b \in A$ such that aRb. Then there is a sequence $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in A such that $a_n R a_{n+1}$, for all $n \in \mathbb{N}$.

   Show that DC implies the countable axiom of choice.

6. **Definition**: A set X is **definable** if there is a formula φ in the language of set theory $\mathcal{L} = \{\epsilon\}$, such that $X = \{u : \varphi(u)\}$.

   Assume that not every ordinal number is definable. Show that the property "X is definable" is not expressible in $\mathcal{L}$.