بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۴/۲/۳۰
موضوع امتحان: منطق

۱– فرض کنید $\mathbf{R} = (R, +, \times, \circ, 1)$ یک حلقه جابجایی در زبان $\mathcal{L} = \{+, \times, \circ, 1\}$ باشد. نماد تابعی یک مرضعی I را به زبان $\mathcal{L}$ اضافه می‌کنیم. مجموعه‌ای از اصول Γ، را در زبان $\mathcal{L} \cup \{I\}$ بنویسید به‌طوریکه

الف) اگر $(R, I) \models \Gamma$، آنگاه I یک ایده‌آل در R باشد.

ب) اگر $(R, I) \models \Gamma$، آنگاه I یک ایده‌آل اول در R باشد.

ج) اگر $(R, I) \models \Gamma$، آنگاه I یک ایده‌آل ماگزیمال در R باشد.

۲– فرض کنید ZF اصول مرضوعه نظریه مجموعه‌ها (بدون اصل انتخاب) باشد. ثابت کنید (با استفاده از قضیه فشردگی) مدلی برای ZF، مانند (M, E) موجود است به‌طوریکه دارای عناصری مثل x_i، $i \in \omega$ است که $x_{i+1} E x_i$ برای هر i در ω. بعلاوه توضیح دهید که چگونه وجود چنین مدلی با اصل تنظیم متناقض نیست.

۳– رده K از همه ساخت‌های متناهی را در نظر بگیرید. نشان دهید که K در منطق مرتبه اول اصل‌پذیر نیست.

۴– فرض کنید $\mathbf{G} = (G, o, e)$ یک گروه باشد که برای هر عدد طبیعی n، عضو g در G وجود داشته باشد که $g^n = \underbrace{gogo \ldots og}_{n} = e$. ثابت کنید گروه $\mathbf{H} = (H, \times, e')$ وجود دارد که $\mathbf{G} \equiv \mathbf{H}$ و عضو $h \in H$ وجود دارد که $h^\infty = h \times h \ldots = e'$.

۵− ساخت $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, +, \times, ۰, ۱)$ را در زبان $\mathcal{L} = \{+, \times, ۰, ۱\}$ در نظر بگیرید ($\mathbf{R}$ مجموعه اعداد حقیقی)

الف) ثابت کنید مجموعه $I = \{x \in \mathbb{R} | x \succeq ۰\}$ در $\mathbb{R}$ تعریف‌پذیر است.

ب) نشان دهید مجموعه I را نمیتوان با یک فرمول بدون سور در $\mathcal{L}$ تعریف نمود.

٦− مثالی از نظریه T در یک زبان $\mathcal{L}$ ارایه کنید که تعداد اعضای مدل‌های متناهی T دقیقاً مجموعه $\{n^۲ : n \in \omega\}$ باشد.

(راهنمایی: جبرهای بول را به خاطر آورید!)

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Logic

1) Let $\mathbf{R} = (R, +, \times, 0, 1)$ be a commutative ring in the language $\mathcal{L} = \{+, \times, 0, 1\}$. Let I be a monadic function symbol. Find a set Γ of axioms in $\mathcal{L} \cup \{I\}$ such that

a) if $(R, I) \models \Gamma$, then I is an ideal in R,

b) if $(R, I) \models \Gamma$, then I is a prime ideal in R,

c) if $(R, I) \models \Gamma$, then I is a maximal ideal in R.

2) Let ZF denotes the axioms of set theory (without the axiom of choice). Prove that (using the compactness theoren) there exists a model (M, E) of ZF with elements $x_i \in M$, $i \in \omega$ such that $x_{i+1} E x_i$ for all $i \in \omega$. Moreover, explain that the existence of such a model does not contradict to the axiom of regularity in ZF.

3) Let K be the class of all finite structures. Prove that K is not axiomatizable in first order logic.

4) Let $\mathbf{G} = (G, o, e)$ be a group such that for any natural number n, there exists $g \in G$ with $g^n = \underbrace{gogo \ldots og}_{n-times} = e$. Prove that there is a group $\mathbf{H} = (H, \times, e')$, elementary equivalent to $\mathbf{G}$ and there exists $h \in H$ such that $h^\infty = h \times h \ldots = e'$

5) Let $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, +, \times, 0, 1)$ be a structue for the language $\mathcal{L} = \{+, \times, 0, 1\}$, where $\mathbb{R}$ is the set of real numbers.

a) Prove that the set $I = \{x \in \mathbb{R} | x \succeq 0\}$ is definable in $\mathbf{R}$.

b) Show that I is not definable by a quantifier-free formula in $\mathcal{L}$.

c) Prove that Th $(\mathbb{R})$ is a model-complete theory in $\mathcal{L}$.

6) Give an example of a theay T in a first order language $\mathcal{L}$ such that the cardinalites of all finite models of T is $\{2^n : n \in \omega\}$. (Hint: Remember Boolean algebras!)