

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی

## آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۴/۲/۳۰  
موضوع امتحان: نظریه اعداد

• ارزش تمامی سوالات با هم برابر می باشد.

۱- برای کدام اعداد اول  $p$  معادله  $x^2 + py - 7 = 0$  در  $\mathbb{Z}$  جواب دارد؟

۲- تعداد جوابهای معادله  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  در  $\mathbb{F}_p$  (میدان  $p$  عضوی) را محاسبه کنید.

۳- فرض کنید  $K$  میدانی با مشخصه  $p$  و  $L/K$  گسترشی گالوا از درجه  $p$  باشد. نشان دهید  $\alpha \in L$  وجود دارد بطوری که  $L = K(\alpha)$  و  $\alpha^p - \alpha \in K$ .

۴- نشان دهید برای هر گروه آبلی متناهی  $G$ ، گسترشی گالوا  $K/\mathbb{Q}$  وجود دارد بطوری که  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \sim G$ .

۵- همه ارزیابیهای ارشمیدسی و نارشمیدسی میدان  $\overline{\mathbb{Q}}(\sqrt{-3})$  را بیابید.

۶- میدان موضعی را تعریف کنید و نشان دهید هر میدان موضعی گسترشی متناهی از  $\mathbb{Q}_p$  یا  $\mathbb{F}_p((x))$  است.

**Ph.D. Entrance Examination**  
**Number Theory**

- 1) For which primes  $p$  the equation  $x^2 + py - 7 = 0$  has solution in  $\mathbb{Z}$ ?
  
- 2) Compute the number of solutions in  $\mathbb{F}_p$  (the field with  $p$  elements) of the equation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
  
- 3) Let  $K$  be a field of characteristic  $p$  and  $L/K$  a Galois extension of degree  $p$ . Show that there exists  $\alpha \in L$  such that  $L = K(\alpha)$  and  $\alpha^p - \alpha \in K$ .
  
- 4) Show that for any finite abelian group  $G$ , there exists a Galois extension  $K/\mathbb{Q}$  such that  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \sim G$ .
  
- 5) Find all archimedean and nonarchimedean valuations of the field  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ .
  
- 6) Define the notion of local field and show that any local field is a finite extension of  $\mathbb{Q}_p$  or  $\mathbb{F}_p((x))$ .