

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی

## آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۳/۳/۱  
موضوع امتحان: آنالیز عددی

(۱۰ نمره) -۱

(۵ نمره) الف) به ازای چه مقادیر  $x$ ، محاسبه  $\log(\sqrt{x^2 + 1} + x)$  با کامپیوتر به صورت عبارت معادل

$$-\log(\sqrt{x^2 + 1} - x) \text{ ارجحیت دارد؟ چرا؟}$$

(۵ نمره) ب) نشان دهید شعاع طیفی هر ماتریس از اندازه ماتریس در هر نرم دلخواه وابسته به یک نرم

برداری بزرگتر نیست. به عبارت دیگر، نشان دهید:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \leq \|A\|$$

که در آن  $\lambda_i$ ها مقادیر ویژه ماتریس  $A$ ،  $n \times n$  و

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

(۱۰ نمره) -۲ دنباله حاصل از حل دستگاه معادلات خطی  $Ax = b$  به وسیله روش تکراری

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

را با شروع از یک حدس اولیه  $x^{(0)}$  و ماتریس داده شده  $B$  و بردار داده شده  $c$  در نظر بگیرید. اگر

دنباله  $\{x^{(k)}\}$  به  $x^*$  جواب دقیق  $Ax = b$  همگرا شود، آنگاه نشان دهید:

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}{1 - \|B\|} \|B\|^k$$

(۱۰ نمره) ۳- فرض کنید  $f$  یک تابع درجه دوم و  $d$  یک بردار داده شده است.  $G$  را ماتریس همبستگی  $f$  و  $g$  را گرادینان  $f$  در  $x_0$  بگیرید. فرض کنید  $d^T G d > 0$ . تعریف کنید:

$$\psi(\lambda) = f(x_0 - \lambda d)$$

(۵ نمره) الف) نشان دهید:

$$\min_{\lambda} \psi(\lambda) = \psi(0) - \frac{(d^T g)^2}{2 d^T G d}$$

(۵ نمره) ب) نشان دهید که روش نیوتون برای مینیمم سازی  $\psi(\lambda)$  با هر نقطه شروع  $\lambda_0$  پس از یک تکرار به جواب می‌رسد.

(۱۰ نمره) ۴- فرض کنید  $\{p_i(x)\}_{i=0}^n$  چند جمله‌ایهای دوبه‌دو متعامد در فاصله  $[a, b]$  نسبت به تابع وزن  $w(x)$  باشند.

(۵ نمره) الف) نشان دهید که برای هر چند جمله‌ای  $q_{2n-1}(x)$  از درجه  $2n-1$  داریم:

$$\int_a^b q_{2n-1}(x) w(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{2n-1}(x_i)$$

که در آن

$$\lambda_i = \int_a^b w(x) l_i(x) dx$$

$$l_i(x) = \frac{p_n(x)}{p_n'(x_i) \cdot (x - x_i)}$$

و  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  ریشه‌های چند جمله‌ای  $p_n(x)$  هستند (فرض کنید که  $x_i$ ها متمایزند).

(۵ نمره) ب) ثابت کنید:

$$\int_a^b w(x) l_i(x) dx = \int_a^b w(x) l_i^2(x) dx$$

که در آن  $l_i(x)$ ها چند جمله‌ایهای پایه لاگرانژ مبتنی بر  $x_1, \dots, x_n$  ریشه‌های متمایز  $p_n(x)$  هستند.

(۱۰ نمره) ۵- حل عددی معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی به صورت

$$y'' = x + y$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 0.5$$

با طول گام  $0.25$  مورد نظر است. دستگاه معادلات خطی حاصل از روشهای زیر را مشخص کنید (نیازی به حل دستگاه نیست):

(۵ نمره) الف) تفاضلهای منتهای.

(۵ نمره) ب) عناصر منتهای با استفاده از توابع پایه کلاهی (اسپلاین خطی).

(۱۰ نمره) ۶- چند جمله‌ای از درجه کوچکتر یا مساوی ۴،  $P_4(x)$ ، را تعیین کنید به طوری که در نرم  $L_2$  در فاصله  $[-1, 1]$  به  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  نزدیکترین باشد. به عبارت دیگر، ضرایب  $P_4$  را به دست آورید به طوری که  $\|P_4 - f\|_2$  مینیمم شود، که در آن

$$\|g\|_2^2 = \int_{-1}^1 g^2(x) dx.$$

## Ph.D. Entrance Examination

### Numerical Analysis

10 points **1)**

5 points a) For what values of  $x$ , it is preferred to use  $-\log(\sqrt{x^2 + 1} - x)$  for the computation of the equivalent expression  $\log(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ ? Why?

5 points b) Show that the spectral radius of a matrix is not bigger than the norm of the matrix, with respect to any subordinate norm. In other words, show

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \leq \|A\|$$

where the  $\lambda_i$  are the eigenvalues of  $A$  and

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

10 points **2)** Consider the sequence obtained for solving the linear system of equations  $Ax = b$  using the iterative relation

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

starting with  $x^{(0)}$ , and  $B$  and  $c$  given. If the sequence  $\{x^{(k)}\}$  converges to  $x^*$ , the exact solution of  $Ax = b$ , then show:

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}{1 - \|B\|} \|B\|^k.$$

10 points **3)** Assume that  $f$  is a quadratic function and  $d$  is a given vector. Take  $G$  to be the Hessian and  $g$  the gradient of  $f$  at  $x_0$ , respectively. Assume  $d^T G d > 0$ . Define:

$$\psi(\lambda) = f(x_0 - \lambda d).$$

5 points a) Show:

$$\min_{\lambda} \psi(\lambda) = \psi(0) - \frac{(\mathbf{d}^T \mathbf{g})^2}{2\mathbf{d}^T \mathbf{G} \mathbf{d}}$$

5 points b) Show that the Newton method for the minimization of  $\psi(\lambda)$  converges to the solution in one iteration, starting with any given  $\lambda_0$ .

10 points **4**) Assume  $\{p_i(x)\}_{i=0}^n$  are mutually orthogonal polynomials on  $[a, b]$  with respect to a weight function  $w(x)$ .

5 points a) Show that for any polynomial  $q_{2n-1}(x)$ , of degree  $2n - 1$ , we have:

$$\int_a^b q_{2n-1}(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i q_{2n-1}(x_i)$$

where,

$$\lambda_i = \int_a^b w(x)l_i(x)dx$$
$$l_i(x) = \frac{p_n(x)}{p_n'(x_i) \cdot (x - x_i)}$$

and  $x_i, i = 1, \dots, n$ , are zeros (roots) of the polynomial  $p_n(x)$ . Assume the  $x_i$ 's are distinct.

5 points b) Prove:

$$\int_a^b w(x)l_i(x)dx = \int_a^b w(x)l_i^2(x)dx$$

where the  $x_i$ 's are the roots of  $p_n(x)$  and the  $l_i(x)$ 's are the Lagrange basic polynomials on  $x_1, \dots, x_n$ .

10 points **5**) Consider the numerical solution of the differential equation with boundary conditions as

$$y'' = x + y$$
$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 0.5$$

using the step length 0.25. For each method below, set up the corresponding system of equations obtained (you do not need to solve the system):

5 points a) Finite difference.

5 points b) Finite element using the hat functions (linear splines).

10 points **6**) Determine the polynomial of degree 4,  $P_4(x)$ , closest to  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  using the  $L_2$  norm in the interval  $[-1, 1]$ . In other words, determine the coefficients of  $P_4$  so that  $\|P_4 - f\|_2$  is minimized, where

$$\|g\|_2^2 = \int_{-1}^1 g^2(x) dx.$$