بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۴/۲/۳۰
موضوع امتحان: آنالیز عددی

۱ــ فرض کنید با اعمال یک روش تکراری روی دستگاه معادلات $Ax = b$، با A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر، پاسخ تقریبی $\tilde{x}$ را بدست آورده‌ایم. فرض کنید $e := x - \tilde{x}$ بردار خطا و $r := Ae$ بردار مانده (residual)، و $\mathcal{K}(A)$ عدد حالت (condition number) ماتریس A باشند.

الف) نشان دهید خطای نسبی $\frac{\|e\|}{\|x\|}$ در بازهٔ زیر قرار دارد:

$$\left[\frac{1}{\mathcal{K}(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|}, \quad \mathcal{K}(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}\right]$$

ب) در مورد درستی یا نادرستی ادعای زیر بحث کنید:
$\frac{\|e\|}{\|x\|}$ کوچک است اگر و تنها اگر $\frac{\|r\|}{\|b\|}$ کوچک باشد.

پ) در مورد درستی یا نادرستی ادعای زیر بحث کنید:
$\frac{\|e\|}{\|x\|}$ کوچک است اگر و تنها اگر $\mathcal{K}(A)$ کوچک باشد.

۲ــ برای $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ نشان دهید:

$$f[x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{(-a)^n}{ax+b}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{ax_k+b}$$

که در آن x، x_1، ...، x_n نقاط متمایز در دامنه f هستند.

۳− فرض کنید ω یک تابع وزن بر $[a,b]$ باشد. به یاد آوریم که دو تابع حقیقی−مقدار $f,g \in L^{۲}[a,b]$ را متعامد خوانیم اگر

$$(f,g) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx = ۰.$$

حال فرض کنیم $\{p_n\}$ یک دنباله از چندجمله‌ایهای متعامد باشد که درجه p_n برابر n است. در موارد (الف) و (ب)، به طور کلی منظور از a_k ، ضریب بزرگترین درجه در چندجمله‌ای p_k (یعنی ضریب x^k) است.

الف) نشان دهید که اعداد $\alpha_n \neq ۰$ ، β_n ، و $\gamma_n \neq ۰$ موجودند بطوریکه

$$p_n(x) = (\alpha_n x + \beta_n)\, p_{n-۱}(x) + \gamma_n\, p_{n-۲}(x) \qquad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

که در آن $p_{-۱}(x) \equiv ۰$. به علاوه داریم:

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n-۱}} \neq ۰, \qquad \gamma_n = -\frac{\alpha_n\ (p_{n-۱}, p_{n-۱})}{\alpha_{n-۱}\ (p_{n-۲}, p_{n-۲})}$$

ب) نشان دهید که اگر $\{p_n\}$ متعامد یکه باشد، آنگاه برای هر $x \neq y$ داریم:

$$\sum_{k=۰}^{n} p_k(x)\, p_k(y) = \left(\frac{a_n}{a_{n+۱}}\right)\left(\frac{p_{n+۱}(x)\, p_n(y) - p_{n+۱}(y)\, p_n(x)}{x-y}\right)$$

۴−

الف) نشان دهید تابع $\|x\|_C = (x^T C x)^{۱/۲}$، $x \in R^n$، به ازای C، $n \times n$، یک ماتریس متقارن و معین مثبت، یک نرم در R^n است.

ب) مساله

$$\min_x \|D(Ax-b)\|_۲$$

را در نظر بگیرید، که در آن A، $m \times n$، $m \geq n$، D، ماتریس قطری $m \times m$ با درایه‌های قطری ناصفر، $b \in R^m$، داده شده‌اند. در خصوص شرایط وجود (یا عدم وجود) جواب، یگانگی (یا عدم یگانگی) جواب، موضعی یا سراسری بودن جواب، و، در صورت وجود جواب، چگونگی بدست آوردن آن بحث کنید.

پ) فرض کنید C متقارن و معین مثبت است. مساله

$$\min_x \|Ax-b\|_C$$

را در نظر بگیرید. در خصوص جواب مساله همانند موارد یاد شده در (ب) بحث کنید.

۵- فرض کنید m یک عدد فرد است و $c=\frac{a+b}{۲}$. نشان دهید که روش m نقطه‌ای نیوتون—کوته، $Q_{NC(m)}$، برای تخمین انتگرالهای معین زیر، مقدار دقیق انتگرال را بدست می‌دهد.

الف) $I=\int_a^b (x-c)^k dx$، که در آن k یک عدد فرد است.

ب) $I=\int_a^b p(x)dx$ که در آن $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه m است.

۶- جواب تقریبی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''-۵y'+۶y=۳x+۱$$

با شرایط مرزی

$$y(۰)=۰,\ \ y(۱)=۰$$

را به روش اجزای متناهی با استفاده از سه تابع پایهٔ کلاهی (اسپلاین خطی) در فاصله $[۰,۱]$ بدست آورید.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Numerical Analysis

1) Assume that, using some iterative method, we have obtained an approximate solution $\tilde{x}$ for the system of linear equations $Ax = b$, with A an invertible, square matrix. Let $e = x - \tilde{x}$ be the error vector and $r = Ae$ the residual vector, and $\mathcal{K}(A)$ the condition number of A.

a) Show that the relative error $\frac{||e||}{||x||}$ lies in the interval below:

$$\left[\frac{1}{\mathcal{K}(A)}\frac{||r||}{||b||}, \quad \mathcal{K}(A)\frac{||r||}{||b||}\right]$$

b) Discuss whether the following claim is true or false:

Relative error $\frac{||e||}{||x||}$ is small if and only if $\frac{||r||}{||b||}$ is small.

c) Discuss whether the following claim is true or false:

Relative error $\frac{||e||}{||x||}$ is small if and only if $\mathcal{K}(A)$ is small.

2) For $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ show that

$$f[x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{(-a)^n}{ax+b}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{ax_k+b}$$

where, $x, x_1, \ldots, x_n$ are distinct points in the domain of f.

3) Let ω be a weight function on $[a, b]$. We recall that two real-valued functions $f, g \in L^2[a, b]$ are called orthogonal if

$$(f, g) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx = 0.$$

Now let $\{p_n\}$ be a sequence of orthogonal polynomials with degree of p_n equal to n. For parts (a) and (b) below, assume a_k is the leading coefficient in p_k (i.e., the coefficient of x^k).

a) Show that there exist constants $\alpha_n \neq 0$, β_n, and $\gamma_n \neq 0$ such that

$$p_n(x) = (\alpha_n x + \beta_n)\, p_{n-1}(x) + \gamma_n\, p_{n-2}(x) \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots$$

where $p_{-1}(x) \equiv 0$. In addition, we have:

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \neq 0, \quad \gamma_n = -\frac{\alpha_n\ (p_{n-1}, p_{n-1})}{\alpha_{n-1}\ (p_{n-2}, p_{n-2})}$$

b) Show that if $\{p_n\}$ is **orthonormal**, then for $x \neq y$ we have

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, p_k(y) = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \left(\frac{p_{n+1}(x)\, p_n(y) - p_{n+1}(y)\, p_n(x)}{x - y}\right)$$

4)

a) Show that $\|x\|_C = (x^T C x)^{1/2}$, $x \in R^n$, for an $n \times n$ symmetric positive definite matrix C is a norm in R^n.

b) Consider the problem,

$$\min_x \|D(Ax - b)\|_2$$

where $A, m \times n, m \geq n$, D, a diagonal matrix with nonzero diagonal entries, and $b \in R^n$ are given. Discuss the conditions for existence (or nonexistence) of the solution, uniqueness (or nonuniqueness) of the solution, being local or global, and method for finding a solution (if it exists).

c) Assume C is symmetric and positive definite. Consider, the problem

$$\min_x \|Ax - b\|_C.$$

Give your discussion as in (b) for this new problem.

5) Assume m is an odd number and $c = \frac{a+b}{2}$. Consider the m point Newton-Cotes, $Q_{NC(m)}$, for estimating definite integrals. In each case below, show that $Q_{NC(m)}$ computes the exact value of the integral.

a) $I = \int_a^b (x - c)^k dx$, where k is an odd number.

b) $I = \int_a^b p(x) dx$, where $p(x)$ is a polynomial of degree m.

6) Consider the following differential equations:

$$y'' - 5y' + 6y = 3x + 1$$

with the boundary conditions:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Use three hat functions (linear splines) as the basis on $[0, 1]$ and derive the finite element approximation for the above problem.