بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۳/۲/۳۱
موضوع امتحان: بهینه‌سازی

(۱۳ نمره) ۱− فرض کنید x° یک نقطه شدنی برای مساله

$$\begin{aligned} \min_{x\in R^n} \quad & z = c^T x \\ s.t. \quad & a_i^T x \le b_i, \qquad i = 1,\dots,m \end{aligned} \qquad (P)$$

باشد و s° یک بردار (هم بعد با x) داده شده است.

(۳ نمره)− الف) چه شرایطی بر روی $\sigma \ge 0$ باید داشته باشیم تا $x^\circ - \sigma s^\circ$ شدنی باشد؟

(۱ نمره)− ب) چه شرایطی بر روی s° باید برقرار باشد تا $x^\circ - \sigma s^\circ$ تابع هدف را نسبت به نقطه x° کاهش دهد؟

(۳ نمره)− پ) چه شرایطی بر روی s° باید برقرار باشد تا مساله (P) نامتناهی باشد؟

(۳ نمره)− ت) چه شرایطی بر روی s° باید داشته باشیم تا $x^\circ - \sigma s^\circ$ به ازای همه مقادیر $\sigma \ge 0$ شدنی باشد؟

(۳ نمره)− ث) فرض کنید مساله (P) دارای جواب بهینه است. ادعای زیر را ثابت یا رد کنید:

$$a_i^T s^\circ \ge 0 \Rightarrow c^T s^\circ \le 0, \qquad i = 1,\dots,m.$$

(۱۰ نمره) ۲– فرض کنید که X یک چندوجهی ناتهی و کراندار است و مساله

$$\begin{aligned} \min_{x\in R^n} = \quad & c^Tx \\ s.t. \quad & Ax \geq b \qquad\qquad (P) \\ & x \in X \end{aligned}$$

دارای جواب بهینه است. ثابت کنید که مقدار بهینه تابع هدف این مساله برابر است با

$$\max_{w\geq 0}\{w^Tb + \min_{x\in X}(c^Tx - w^TAx)\}.$$

(۱۰ نمره) ۳– در مساله زیر فرض کنید که $\sum\limits_j b_j < \sum\limits_i a_i$ و $c_{ij} > 0$ برای همه i و j:

$$Minimize \quad z = \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}$$

$s.t.$

$$\sum_j x_{ij} \leq a_i, \qquad i = 1, \ldots, m \qquad (1)$$

$$\sum_i x_{ij} \geq b_j, \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad , i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

ثابت کنید که در هر جواب بهینه برای این مساله قیدهای (۲) به صورت تساوی ارضا می‌شود.

(۱۷ نمره) ۴– فرض کنید c زیرمجموعه‌ای از R^n است و $h : c \to R^1$.

(٦ نمره) الف) فرض کنید c محدب و h بر روی c مشتق‌پذیر است. ثابت کنید که h بر روی c اکیداً محدب است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$h(y) > h(x) + \nabla^T h(x)(y-x) \qquad \forall x, y \in c, x \neq y.$$

(۳ نمره) ب) فرض کنید c مجموعه‌ای باز و محدب، و h مشتق‌پذیر و محدب است. نشان دهید که $x^* \in c$ یک مینیمم کننده سراسری برای h بر روی c است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\nabla h(x^*) = 0.$$

(۶ نمره) پ) فرض کنید c مجموعه‌ای باز و محدب و h دارای مشتقات پاره‌ای دوم پیوسته بر روی c است. ثابت کنید h بر روی c اکیداً محدب است اگر و تنها اگر ماتریس هسی h بر روی c معین مثبت باشد.

(۲ نمره) ت) فرض کنید c باز و محدب، و h بر روی c اکیداً محدب است. ثابت کنید اگر x^* یک مینیمم کننده موضعی h بر روی c باشد آنگاه x^* مینیمم کننده سراسری یگانه h بر روی c است.

(۱۰ نمره) **۵–** فرض کنید: $Q(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + g^T x + b$ و $x \in R^n$.

(۲ نمره) الف) فرض کنید G معین مثبت است. نشان دهید که مینیمم کننده یگانه و سراسری Q وجود دارد و از حل دستگاه $Gx = -g$ بدست می‌آید. (چرا جواب بدست آمده مینیمم کننده سراسری و یگانه است؟)

(۲ نمره) ب) مساله

$$\begin{array}{ll} \min & Q(x) \\ s.t. & Ax = b \end{array} \qquad (P)$$

را در نظر بگیرید. تابع لاگرانژی را برای مساله (P) بنویسید و شرایط لازم مرتبه اول برای x^* یک مینیمم کننده موضعی مساله (P) را به‌صورت یک دستگاه معادلات بیان کنید.

(۳ نمره) پ) فرض کنید که سطرهای ماتریس A مستقل خطی باشند. نشان دهید که به ازای هر x شدنی برای مساله (P)، اگر شرایط لازم مرتبه اول برای x برقرار باشد آنگاه λ، ضرایب لاگرانژ مربوط، یگانه است.

(۱ نمره) ت) فرض کنید که $b = 0$ و ستونهای A مستقل خطی هستند. نشان دهید که برای هر (x, λ) که شرایط لازم مرتبه اول را برقرار می‌سازد، داریم: $x = 0$.

(۲ نمره) ث) فرض کنید که $\nabla q(x^*) = 0$ و سطرهای A مستقل خطی هستند. نشان دهید که برای هر (x^*, λ) که شرایط لازم مرتبه اول را برقرار سازد، داریم: $\lambda = 0$.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Optimization

(13 points) 1. Assume x^0 is a feasible point for the problem

$$(P) \qquad \begin{array}{lll} \min_{x \in R^n} & z = c^T x & \\ s.t. & a_i^T x \le b_i, & i = 1, \ldots, m \end{array}$$

and s^0 is a given vector having the same dimension as x.

3 points a) What condition must hold on $\sigma \ge 0$ so that $x^0 - \sigma s^0$ is feasible?

1 points b) What conditions must hold on s^0 so that $x^0 - \sigma s^0$ will reduce the objective function value relative to the point x^0?

3 points c) What conditions must hold on s^0 so that (P) is infinite?

3 points d) What conditions must hold on s^0 so that $x^0 - \sigma s^0$ is feasible for all $\sigma \ge 0$?

3 points e) Assume that (P) has an optimal solution. Prove or refute the following statement:

$$a_i^T s^0 \ge 0 \Rightarrow c^T s^0 \le 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

(10 points) 2. Assume that X is a nonempty and bounded polyhedron and the problem

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min_{x \in R^n} = & c^T x \\ s.t. & Ax \ge b \\ & x \in X \end{array}$$

has an optimal solution. Prove that the optimal objective function value for (P) is the solution of the problem given below:

$$\max_{w \ge 0} \{ w^T b + \min_{x \in X} (c^T x - w^T A x) \}.$$

(10 points) 3. For the problem given below, assume $\sum_i a_i > \sum_j b_j$ and $c_{ij} > 0$, for all i and j:

$$\text{Minimize} \quad z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.$$

$$(1) \qquad \sum_j x_{ij} \le a_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$(2) \qquad \sum_i x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad , i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Prove that at any optimal point for this problem, the constraints given as (2) are satisfied by equality.

(17 points) 4. Assume that c is a subset of R^n and $h : c \to R^1$.

6 points a) Assume c is convex and h is differentiable on c. Prove that h is **strictly** convex on c if and only if

$$h(y) > h(x) + \nabla^T h(x)(y - x) \quad \forall x, y \in c, x \neq y.$$

3 poitns b) Assume c is open and convex, and h is convex and differentiable. Show that $x^* \in c$ is a global minimizer of h on c if and only if

$$\nabla h(x^*) = 0.$$

6 points c) Assume c is open and convex, and second partial derivatives of h are continuous on c. Prove that h is **strictly** convex on c if and only if the Hessian of h on c is positive definite.

2 points d) Assume c is open and convex, and h is **strictly** convex on c. Prove that if x^* is a local minimizer of h on c then x^* is a unique global minimizer of h on c.

(10 points) 5. Let $Q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + g^T x + b$ and $x \in R^n$.

2 points a) Assume that G is positive definite. Show that the **unique global** minimizer of Q exists and is the solution of $Gx = -g$. (Why is the solution the unique global minimizer?)

2 points b) Consider

$$(P) \qquad \begin{array}{ll} \min & Q(x) \\ s.t. & Ax = b \end{array}$$

write down the Lagrangian function for (P) and set up the first order necessary conditions for a local solution of (P) as a syotem of equations.

3 points c) Assume the rows of A are independent. Show that for any feasible solution x of (P), if the first order necessary conditions are satisfied at x then λ, the associated Lagrange multiplier vector, is unique.

1 points d) Assume $b = 0$ and the columns of A are independent. Show that for any (x, λ) satisfying the first order necessary conditions, we have $x = 0$.

2 points e) Assume $\bigtriangledown q(x^*) = 0$ and the rows of A are independent. Show that for any (x^*, λ) satisfying the first order necessary conditions, we have $\lambda = 0$.