

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی

## آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۴/۲/۲۹

موضوع امتحان: بهینه‌سازی

۱- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  است.

الف) فرض کنید  $b_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ .

نشان دهید که اگر به ازای هر  $x$  نامنفی داشته باشیم

$$Ax \leq b \Rightarrow c^T x \geq 0$$

آنگاه به ازای هر  $\lambda$  نامثبت خواهیم داشت:

$$A^T \lambda \leq c \Rightarrow b^T \lambda \leq 0$$

آیا اگر فرض  $b_i \geq 0, i = 1, \dots, m$  برداشته شود، باز هم این ادعا درست است؟ استدلال کنید.

ب) فرض کنید  $c_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ .

نشان دهید که اگر به ازای هر  $\lambda$  نامثبت داشته باشیم

$$A^T \lambda \leq c \Rightarrow b^T \lambda \leq 0$$

آنگاه به ازای هر  $x$  نامنفی خواهیم داشت:

$$Ax \leq b \Rightarrow c^T x \geq 0$$

آیا اگر فرض  $c_i \geq 0, i = 1, \dots, n$  برداشته شود، باز هم این ادعا درست است؟ استدلال کنید.

پ) نشان دهید اگر  $x$  نامنفی و  $\lambda$  نامثبت وجود داشته باشند به طوری که در دستگاه

$$Ax \leq b, \quad A^T \lambda \leq c \quad (R)$$

صدق کنند، آنگاه  $x^*$  نامنفی و  $\lambda^*$  نامثبت وجود دارند به طوری که در دستگاه (R) صدق می کنند و  $c^T x^* = b^T \lambda^*$ . آیا برای چنین  $x^*$  و  $\lambda^*$  می توان گفت که  $c^T x^* = b^T \lambda^* = 0$ ؟ استدلال کنید.

۲- مساله های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (P)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y \leq 0 \end{aligned} \quad (Q)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{aligned} \quad (R)$$

در پاسخ به موارد زیر می توانید از قضایا و نتایج برنامه ریزی خطی با بیان دقیق آنها استفاده کنید.

الف) نشان دهید که مساله (P) ناشدنی است اگر و تنها اگر مساله (Q) بی کران باشد.

در مورد درستی یا نادرستی موارد (ب) تا (ث) با ارایه دلیل بحث کنید.

ب) مساله (P) ناشدنی است اگر و تنها اگر مساله (R) بی کران باشد.

پ) اگر (Q) دارای جواب بهینه باشد آنگاه (R) دارای جواب بهینه است.

ت) اگر مساله (R) دارای جواب بهینه باشد آنگاه مساله (Q) نیز دارای جواب بهینه است.

ث) اگر مساله (Q) بی کران باشد آنگاه مساله (R) بی کران است.

۳- برای مساله

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T d \\ \text{s.t.} \quad & Ad \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^n d_i^{\gamma} = 1, \end{aligned} \quad (P)$$

الف) شرایط لازم کیون-تاکر را بنویسید.

ب) توضیح دهید که چگونه شرایط بدست آمده در الف) را می توان با تعدیلی از روش سیمپلکس حل کرد.

پ) آیا مساله (P) همواره دارای جواب است؟ اگر چنین نیست، تحت چه شرایطی مساله (P) دارای جواب است؟

ت) آیا هر جواب بدست آمده برای مساله (P) یک مینیمم کننده سراسری است؟ استدلال کنید.

۴- فرض کنیم  $S$  زیرمجموعه محدبی از  $\mathbb{R}^n$  باشد. تابع  $f: S \rightarrow R$  شبه محدب خوانده می شود هرگاه برای هر  $x, y \in S$  و هر  $0 < \lambda < 1$  داشته باشیم

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

الف) نشان دهید که  $f$  روی مجموعه محدب  $S$  شبه محدب است اگر و تنها اگر برای هر عدد حقیقی  $\alpha$  مجموعه  $S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$  محدب باشد.

ب) فرض کنید که  $S$  مجموعه محدب باز در  $\mathbb{R}^n$  است و  $f: S \rightarrow R$  مشتقپذیر باشد. نشان دهید که  $f$  شبه محدب است اگر و تنها اگر برای هر دو نقطه دلخواه  $x, y \in S$  داشته باشیم:

$$f(x) \leq f(y) \implies \nabla f(y)^T (x - y) \leq 0$$

۵- فرض کنید  $A$  ماتریس  $m \times n$  باشد و مساله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$P(M) : \begin{array}{ll} \min & (c^T x + M \sum_{i=1}^m y_i) \\ \text{s.t.} & Ax + y = b \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

فرض کنید که  $M_0$  موجود باشد به طوری که مساله  $P(M_0)$  دارای جواب بهینه متناهی است. نشان دهید که  $M_1$  ای موجود است و نقطه فرین  $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$  برای ناحیه شدنی مساله  $P(M)$  موجود است که

الف) برای هر  $M_1 \leq M$ ، مساله  $P(M)$  دارای جواب بهینه متناهی است.

ب) نقطه فرین  $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$  یک جواب بهینه برای تمامی مسائل  $P(M)$  به ازای  $M_1 \leq M$  است.

ج) اگر دستگاه  $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$  شدنی باشد، آنگاه نشان دهید که  $y^* = 0$  و بعلاوه  $x^*$  نقطه بهینه برای مساله زیر است:

$$P : \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

## Ph.D. Entrance Examination Optimization

1. Assume  $A$  is an  $m \times n$  matrix.

a) Assume  $b_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ . Show that if for every nonnegative vector  $x$  we have,

$$Ax \leq b \Rightarrow c^T x \geq 0$$

then for every nonpositive vector  $\lambda$  we will have:

$$A^T \lambda \leq c \Rightarrow b^T \lambda \leq 0.$$

Is the claim still true, if we drop the assumption  $b_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ ? Give reasons for your answer.

b) Assume  $c_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ . Show that if for every nonpositive vector we have,

$$A^T \lambda \leq c \Rightarrow b^T \lambda \leq 0$$

then for every nonnegative  $x$  we will have,

$$Ax \leq b \Rightarrow c^T x \geq 0.$$

Is the claim still true, if we drop the assumption  $c_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ ? Give reasons for your answer.

c) Show that if there exist  $x$  nonnegative and  $\lambda$  nonpositive satisfying the system

$$(R) \quad Ax \leq b, \quad A^T \lambda \leq c$$

then  $x^*$  nonnegative and  $\lambda^*$  nonpositive exist satisfying (R) and  $c^T x^* = b^T \lambda^*$ . For such  $x^*$  and  $\lambda^*$ , can we say  $c^T x^* = b^T \lambda^* = 0$ ? Give reasons for your answer.

2. Consider the following problems:

$$(P) \quad \begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$(Q) \quad \begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y \leq 0 \end{aligned}$$

$$(R) \quad \begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c \end{aligned}$$

In answering the following parts, you can use any results from linear programming provided you state them clearly.

a) Show that (P) is infeasible if and only if (Q) is unbounded.

Give reasons for proving or refuting the claims stated in parts (b)-(e) below.

b) (P) is infeasible if and only if (R) is unbounded.

c) If (Q) has an optimal solution then (R) has an optimal solution.

d) If (R) has an optimal solution then (Q) has an optimal solution.

e) If (Q) is unbounded then (R) is unbounded.

3. For problem

$$(P) \quad \begin{aligned} \min \quad & c^T d \\ \text{s.t.} \quad & Ad \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^n d_i^2 = 1, \end{aligned}$$

a) write down the Kuhn-Tucker conditions for its solution.

b) Explain how you can modify the simplex method for linear programming problem to solve for the solutions of the conditions in (a).

c) Does (P) always have a solution? If the answer is negative, state the conditions under which the problem (P) has a solution.

- d) Is every optimal solution for (P), a global solution? Give reasons for your answer.
4. Let  $S$  be a convex subset of  $\mathbb{R}^n$ . A function  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  is said to be *quasi-convex* if for all  $x, y \in S$  and all  $0 < \lambda < 1$  we have

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

- a) Show that a function  $f$  is quasi-convex on a convex set  $S$  if and only if for all real  $\alpha$ , the set  $S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$  is convex.
- b) Suppose  $S$  is convex and open and  $f$  is a differentiable function on  $S$ . Show that  $f$  is quasi-convex if and only if for every  $x, y \in S$ , we have,

$$f(x) \leq f(y) \implies \nabla f(y)^T(x - y) \leq 0$$

5. Let  $A$  be an  $m \times n$  matrix and consider the linear programming problem below:

$$P(M) : \begin{array}{ll} \min & (c^T x + M \sum_{i=1}^m y_i) \\ \text{s.t.} & Ax + y = b \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Suppose there exists  $M_0$  for which the problem  $P(M_0)$  has a finite solution. Show that there exist  $M_1$  and an extreme point  $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$  for the feasible region of  $P(M)$  such that:

- a) For each  $M \geq M_1$  the problem  $P(M)$  has a finite solution.
- b) The extreme point  $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$  is an optimal solution for all programs  $P(M)$  for  $M \geq M_1$ .
- c) Show that if the system  $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$  is feasible, then  $y^* = 0$  and that  $x^*$  is optimal for the problem below:

$$P : \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$