بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **جمعه ۸۳/۳/۱**
موضوع امتحان: ترکیبیات

(بارم هر سوال ۱۰ نمره می‌باشد.)

۱) ۶۹۳ تا عدد طبیعی ناصفر (که ممکن است تکراری نیز باشند) با مجموع ۱۳۸۴ داده شده‌اند. ثابت کنید که می‌توان هر کدام از اعداد ۱ تا ۱۳۸۳ را با مجموع تعدادی از این اعداد ایجاد کرد.

۲) الف) نشان دهید هیچ طرح بلوکی با پارامترهای $v = 21,\ k = 6,\ \lambda = 1$ وجود ندارد.

ب) آیا یک طرح بلوکی متقارن با پارامترهای $k - \lambda = 3$ و $v = 10$ وجود دارد؟ (چرا؟)

ج) شرایطی لازم برای امکان افراز یالهای گراف کامل K_n به K_4ها چنان ارائه کنید که برای $n = 13$ لازم و کافی باشند.

۳) گراف T_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: رأسهای T_n همهٔ جایگشتهای nتائی هستند و دو رأس π_1 و π_2 با هم مجاورند اگر و تنها اگر به ازای هر i، $\pi_1(i) \neq \pi_2(i)$.

الف) مقدار ω، عدد خوشه‌ای گراف T_n را تعیین کنید.

ب) اگر a_n تعداد خوشه‌های با اندازه ω در گراف T_n باشد، یک کران پایین و یک کران بالا برای a_n ارائه کنید (کرانهای بهتر نمره بیشتری دارند. اثبات کرانها نمره دارد).

۴) فرض کنید G یک گراف جهت‌دار است. A را ماتریس مجاورت آن می‌گیریم (با درایه‌های ۰ و ۱). رأس a_j را مجاور a_i گوئیم هرگاه $a_ia_j \in E(G)$،

الف) نشان دهید G شامل یک دور از مرتبهٔ زوج نیست اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$per(A+I) = \det(A+I)$$

ب) فرض کنید عدد طبیعی $d \geq ۷$ به گونه‌ای است که برای هر رأس از G، تعداد یالهای ورودی و خروجی از آن رأس هر یک برابر d باشند. نشان دهید G حتماً شامل دوری از مرتبهٔ زوج است.

۵) فرض کنید Ω یک گروه متناهی با عنصر همانی ۱ و $X \subseteq \Omega$ یک زیرمجموعهٔ آن باشد به‌طوری که

- $۱ \notin X$
- $x \in X \Longleftrightarrow x^{-۱} \in X$

به علاوه اگر Γ یک زیرگروه Ω باشد به‌طوری که $\Gamma \cap X = \emptyset$، گراف ساده $G(\Omega,\Gamma,X)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم،

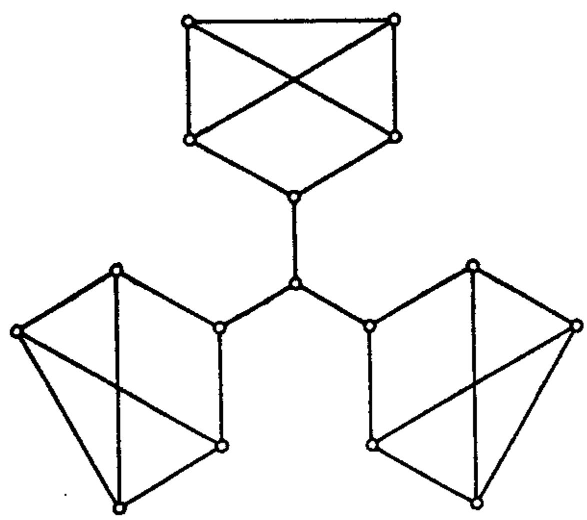
$$V(G(\Omega,\Gamma,X)) = \{a\Gamma \mid a \in \Omega\}$$

$$a\Gamma \sim b\Gamma \Longleftrightarrow \exists x \in X \quad a\Gamma x \cap b\Gamma \neq \emptyset.$$

الف) نشان دهید که $G(\Omega,\Gamma,X)$ خوش‌تعریف است، یعنی نشان دهید که تعریف به انتخاب نماینده بستگی ندارد و همچنین نشان دهید که اگر $a\Gamma \sim b\Gamma$ آنگاه $b\Gamma \sim a\Gamma$ نیز برقرار است.

ب) اگر $X\Gamma X \cap \Gamma = \{۱\}$، دنباله درجه‌ای گراف $G(\Omega,\Gamma,X)$ را محاسبه کنید.

ج) آیا گراف زیر می‌تواند نمایشی به صورت $G(\Omega,\Gamma,X)$ داشته باشد؟



۶) گراف n ـ مکعبی Q_n به ترتیب زیر نیز تعریف می‌شود:

$$Q_۱ = K_۱ \quad , \quad Q_۲ = K_۲, \quad Q_n = Q_{n-۱} \times K_۲$$

که منظور از علامت ضرب همان حاصلضرب دکارتی گرافها است. فرض کنید $n = ۲m - ۱$. اگر S مجموعه‌ای از رأسهای Q_n باشد به‌طوری که فاصله هر جفت از آن اقلاً m باشد، ثابت کنید $|S| \leq n + ۱$.

با یک مثال نشان دهید که این نامساوی می‌تواند به تساوی تبدیل شود.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Combinatorics

All answers must be supported by appropriate reasoning, proofs or counter-examples.

(10 points) P1. Given 693 nonzero natural numbers (repetition is allowed) with the total sum 1384, prove that one can produce *all* natural numbers from 1 to 1383 as partial sums of these given numbers.

(10 points) P2.

a. Show that there does not exist any block design with parameters $v = 21$, $k = 6$ and $\lambda = 1$.

b. Does there exist a *symmetric* block design with parameters $v = 10$ and $k - \lambda = 3$.

c. Deduce necessary conditions for partitioning the edge set of the complete graph K_n into copies of K_4 such that this set of necessary conditions is also sufficient for the case $n = 13$.

(10 points) P3. Define the graph T_n as follows,

$$V(T_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{\pi \mid \pi \in S_n\} \quad \& \quad E(T_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{\pi_1\pi_2 \mid \forall\ 1 \leq i \leq n \quad \pi_1(i) \neq \pi_2(i)\},$$

in which S_n is the symmetric group of all permutations on n letters.

a. Determine the *maximum clique number*, ω, of the graph T_n.

b. Let a_n be the number of cliques of size ω in T_n. Determine an upper bound and a lower bound for a_n (*better bounds and proofs receive more credits*).

(10 points) P4. Let G be a directed graph and A be its adjacency matrix (with entries 0 and 1). We say that the vertex a_j is adjacent to the vertex a_i if $a_ia_j \in E(G)$.

a. Prove that G does not contain a cycle of even order if and only if $\mathrm{per}(A + I) = \det(A + I)$.

b. Assume that the in-degree and the out-degree of every vertex of G is equal to $d \geq 7$. Prove that in this case G necessarily contains a cycle of even order.

(10 points) P5. Let Ω be a *finite* group with the identity element 1, and let X be a subset of Ω such that,

- $1 \notin X$.
- $x \in X \quad \Leftrightarrow \quad x^{-1} \in X$.

Also, let Γ be a subgroup of Ω such that $\Gamma \cap X = \emptyset$. Define the simple graph $G(\Omega, \Gamma, X)$ on the left cosets of Γ in Ω as follows,

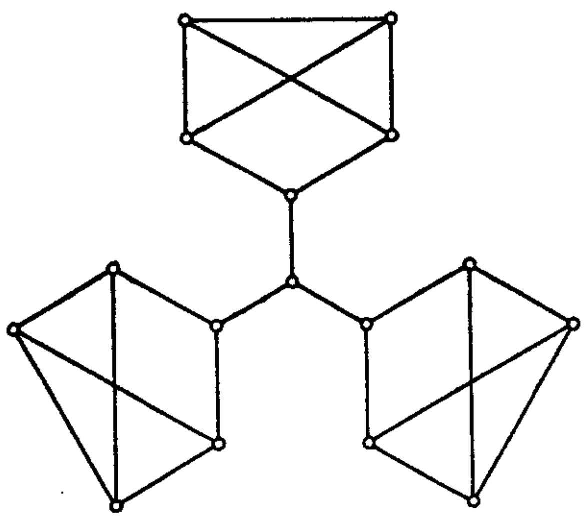
$$V(G(\Omega, \Gamma, X)) \stackrel{\text{def}}{=} \{a\Gamma \mid a \in \Omega\},$$

and the vertex $a\Gamma$ is connected to the vertex $b\Gamma$ if and only if there exists $x \in X$ such that $a\Gamma x \cap b\Gamma \neq \emptyset$.

a. Show that the simple graph $G(\Omega, \Gamma, X)$ is well-defined, i.e. show that the definition does not depend on the choice of representatives and also show that $a\Gamma$ is connected to $b\Gamma$ if and only if $b\Gamma$ is connected to $a\Gamma$.

b. If $X\Gamma X \cap \Gamma = \{1\}$, compute the degree sequence of $G(\Omega, \Gamma, X)$.

c. Can the following graph be represented as a $G(\Omega, \Gamma, X)$ for some Ω, Γ and X?



(10 points) P6. The graph n-cube, Q_n, also can be defined as follows,

$$Q_1 \stackrel{\text{def}}{=} K_1, \quad Q_2 \stackrel{\text{def}}{=} K_2, \quad Q_n \stackrel{\text{def}}{=} Q_{n-1} \times K_2,$$

where $\times$ is the Cartesian product of graphs. Let $n = 2m - 1$ and let S be a subset of vertices in Q_n such that the distance of any two vertices in S is at least m. Prove that $|S| \leq n + 1$. Also, provide an example to show that equality may occur (i.e. this inequality is sharp).