

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

آزمون ورودی دوره دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۳/۳/۱
موضوع امتحان: توپولوژی - هندسه

از ده سوال داده شده شش سوال را به میل خود انتخاب کرده پاسخ دهید. شماره سوالهای انتخاب شده را روی برگه امتحانی بنویسید. اگر شماره سوالهای انتخاب شده ذکر نشده باشد فقط به شش پاسخ اول نمره داده می شود.

۱- فرض کنید X یک فضای توپولوژیک (ناهی) هاوسدرف و فشرده است. اگر X نقطه منفرد (یعنی نقطه‌ای مانند x که $\{x\}$ باز است) نداشته باشد، نشان دهید X ناشماراست.

۲- فرض کنید S رویه‌ای هموار در \mathbb{R}^3 است که انحنای گاوسی در همه نقاط آن مثبت است. ثابت کنید در هر نقطه $x \in S$ یک همسایگی نقطه x در S موجود است که همه نقاط این همسایگی در یک طرف صفحه مماس بر S در نقطه x قرار دارند.

۳- M و N دو خمینه هموار هستند و $f: M \rightarrow N$ یک غوطه‌ور سازی هموار یک‌به‌یک. برای هر یک از دو شرط زیر تحقیق کنید که آیا افزودن این شرط لزوماً موجب می شود که $f(M)$ با توپولوژی القایی از N یک زیرخمینه N شود یا نه.

الف) $f(M)$ به عنوان زیرمجموعه N بسته باشد.

ب) f یک نگاشت سره باشد (یعنی به ازای هر زیرمجموعه فشرده K از N ، $f^{-1}(K)$ فشرده باشد).

۴- کره سه بعدی $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \sum x_i^2 = 1\}$ در \mathbb{R}^4 را در نظر بگیرید. نشان دهید کلاف مماس S^3 ، یعنی TS^3 ، با $S^3 \times \mathbb{R}^3$ همسانریخت است.

۵- جهت پذیری یا جهت ناپذیری فضاهای افکنشی $\mathbb{R}P(n)$ را به طور کامل برای هر n بررسی کنید.

۶- فرض کنید $X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} + X_3 \frac{\partial}{\partial z}$ یک میدان برداری هموار در \mathbb{R}^3 باشد. میدان برداری $curl X$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$curl X = \left(\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

اگر Y و Z دو میدان برداری هموار در \mathbb{R}^3 و X بر Y, Z و $curl X$ همه جا عمود باشد، نشان دهید X همه جا بر $[Y, Z]$ عمود است.

۷- ثابت کنید گروه بنیادی هر گروه توپولوژیک یک گروه آبدلی است.

۸- D را گوی $D = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum x_i^2 < 1\}$ در \mathbb{R}^n می گیریم، $n \geq 2$ ، و فرض می کنیم p و q دو نقطه متمایز D باشند. گروههای همولوژی $D - \{p, q\}$ را محاسبه کنید.

۹- زیرفضای A, B و X از \mathbb{R}^3 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

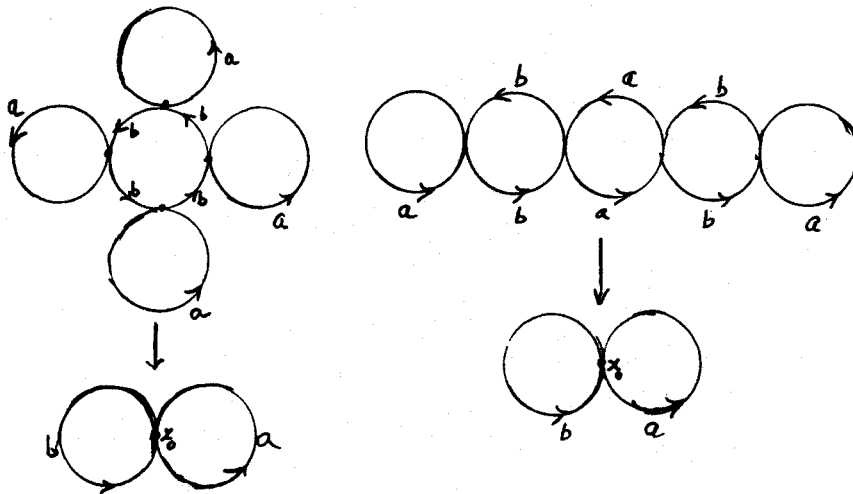
$$A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 = 1, y = 0\}$$

$$X = A \cup B$$

دنباله مایر-ویتوریس همولوژی یا کوهمولوژی (A, B) را بنویسید، همریختی های دنباله را به دقت توصیف کنید، و به کمک این دنباله، گروههای همولوژی یا کوهمولوژی X را محاسبه کنید. (همولوژی یا کوهمولوژی A و B را می توانید دانسته فرض کنید).

۱۰- برای شکل ∞ دو فضای پوششی به شکل زیر در نظر می گیریم. در مورد هر یک گروه تبدیلات پوششی را به طور صریح توصیف کنید. اگر فضای پوششی را به صورت $P : (X', x'_0) \rightarrow (X, x_0)$ نمایش دهیم، در هر مورد بررسی کنید که آیا $P_* \pi_1(X', x'_0)$ یک زیرگروه نرمال $\pi_1(X, x_0)$ است یا نه.



Ph.D. Entrance Examination
Geometry - Topology

Answer six questions from the following ten. Write the numbers of questions chosen on the cover of the answer book; otherwise only the first six answers will be graded.

- 1) Let X be a (non-empty) compact Hausdorff topological space. If X has no isolated points (i.e., points x such that $\{x\}$ is open), show that X is uncountable.
- 2) Let S be a smooth surface in \mathbb{R}^3 with everywhere positive Gaussian curvature. Prove that every point x on S has a neighborhood in S all whose points lie on the same side of the tangent plane to S at x .
- 3) M and N are two smooth manifolds and $f : M \rightarrow N$ a smooth one-one immersion. For each of the following conditions investigate whether the addition of that condition will make $f(M)$ a submanifold of N with induced topology:
 - a) $f(M)$ is closed as a subset of N .
 - b) f is proper, i.e., for every compact set $K \subset N$, $f^{-1}(K)$ is compact.
- 4) Let $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \sum x_i^2 = 1\}$ be the unit sphere in \mathbb{R}^4 . Show that TS^3 , the tangent bundle of S^3 , is homeomorphic to $S^3 \times \mathbb{R}^3$.
- 5) Investigate thoroughly the orientability of the real projective n -space, $\mathbb{R}P(n)$, for each n .
- 6) For a smooth vector field $X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} + X_3 \frac{\partial}{\partial z}$, define $\text{curl } X$ by:

$$\text{curl } X = \left(\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

Suppose that Y and Z are two smooth vectorfields in \mathbb{R}^3 and X is everywhere perpendicular to $\text{curl } X$, Y and Z . Show that X is everywhere perpendicular to $[Y, Z]$.

- 7) Show that the fundamental group of a topological group is abelian.
- 8) Let D be the disk $\{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum x_i^2 < 1\}$, $n \geq 2$, and suppose that p and q are two distinct points of D . Compute the homology groups of $D - \{p, q\}$.
- 9) The subspaces A , B and X of \mathbb{R}^3 are defined as:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \\ B &= \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 = 1, y = 0\} \\ X &= A \cup B \end{aligned}$$

write down the Mayer-Vietoris sequence of (A, B) for homology or cohomology. Describe the homomorphisms explicitly. Use this sequence to compute the homology (or cohomology) of X . (You may assume knowledge of the homology or cohomology of A and B).

- 10) For the figure ∞ , two covering spaces are depicted below. In each case describe explicitly the group of covering transformations. If we write the covering space as $P : (X', x'_0) \rightarrow (X, x_0)$, investigate whether $P_*\pi_1(X', x'_0)$ is a normal subgroup of $\pi_1(X, x_0)$ in each case.

