بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: **۸۴/۲/۳۰**
موضوع امتحان: **توپولوژی ـ هندسه**

از ده سوال داده شده شش سوال را به میل خود انتخاب کرده پاسخ دهید. شماره سوالهای انتخاب شده را روی برگه امتحانی بنویسید. اگر شماره سوالهای انتخاب شده ذکر نشده باشد فقط به شش پاسخ اول نمره داده می‌شود.

در سوالهای زیر S^n، کرهٔ واحد n−بعدی است.

۱− کدامیک از عبارتهای زیر درست است (اثبات کنید و با مثال نقض ارائه دهید):

الف) اگر نمودار نگاشت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ همبند باشد در این صورت f پیوسته است.

ب) اگر نمودار نگاشت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ همبند مسیری باشد در این صورت f پیوسته است.

۲− تمام گروههای متناهی را مشخص کنید که بطور آزاد روی S^1 عمل می‌کنند.

۳− فضای X از چسباندن یالهای یک ۳−سادک بهم بدست می‌آید که روش چسباندن یالها در شکل زیر مشخص شده است.

گروه بنیادی X را محاسبه کنید.

۴− گروههای همولوژی فضاهای $S^۱ \times S^۲$ و $S^۱ \vee S^۲ \vee S^۳$ را محاسبه کنید (مشاهده کنید که گروههای همولوژی دو فضای مذکور با هم ایزومورفیک هستند).

۵− نشان دهید $S^۱ \times S^۲$ با $S^۱ \vee S^۲ \vee S^۳$ هم‌ارز هموتوپ نیست.

٦− S یک رویه هموار و همبند در $\mathbb{R}^۳$ است که انحناهای اصلی آن ثابت و با هم برابر هستند. نشان دهید S قسمتی از یک صفحه و یا یک کره است.

۷− α یک ۱−فرم هموار بسته روی $S^۲$ است. نشان دهید چگونه می‌توان یک نگاشت هموار $f : S^۲ \to \mathbb{R}$ ساخت که $\alpha = df$.

۸− نشان دهید هیچ غوطه‌ورسازی از $\mathbb{R}P^۲$ به توی $\mathbb{R}^۲$ وجود ندارد.

۹− $Gl_n(\mathbb{R})$ را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای باز از ماتریسهای $n \times n$ در نظر بگیرید که برای آنها $\det \neq ۰$. $X : M \to M \cdot A$ و $Y : M \to M \cdot B$ دو میدان برداری روی $Gl_n(\mathbb{R})$ هستند که در آن A و B ماتریسهای $n \times n$ هستند. نشان دهید کروشه لی دو میدان برداری X و Y برابر است با $[X, Y] : M \to M \cdot (AB - BA)$.

۱۰− ω یک ۱−فرم هموار روی زیرمجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^n$ است که $\omega(x) \neq ۰$ برای هر $x \in U$. نشان دهید $d\omega = ۰$ اگر و فقط اگر $L_X \omega = ۰$ برای هر میدان برداری هموار X روی U که $\omega(X) = ۰$.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Geometry - Topology

Answer six questions from the following ten. Write the numbers of questions chosen on the cover of the answer book; otherwise only the first six answers will be graded.

Note that in the following problems S^n is the $n-$dimensional unit sphere.

1) Which of the following statements is true (prove or disprove):

i) If the graph of a map $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is connected, then f is continuous.

ii) If the graph of a map $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is path connected, then f is continuous.

2) Find all finite groups that act freely on S^1.

3) The space X is obtained from a 3-simplex by identifying the edges as shown in the following figure:

Compute the fundamental group of X.

4) Compute the homology groups of $S^1 \times S^2$ and $S^1 \vee S^2 \vee S^3$. (Notice that two spaces have isomorphic homology groups).

5) Show that $S^1 \times S^2$ is not homotopy equivalent to $S^1 \vee S^2 \vee S^3$.

6) Let S be a connected smooth surface in $\mathbb{R}^3$ such that its principal curvatures are constant and equal. Show that S is a part of a sphere or plane.

7) Let α be a smooth closed 1-form on S^2. Show how to construct a smooth map $f : S^2 \to \mathbb{R}$ such that $\alpha = df$.

8) Show that there is no immersion from $\mathbb{R}P^2$ into $\mathbb{R}^2$.

9) Consider $Gl_n(\mathbb{R})$ as the open subset of $n \times n-$ matrices with $\det \neq \circ$. Let $X : M \to M \cdot A$, $Y : M \to M \cdot B$ be two vector fields on $Gl_n(\mathbb{R})$, where A, B are $n \times n-$ matrices. Show that the Lie bracket of X and Y is $[X, Y] : M \to M \cdot (AB - BA)$.

10) Let ω be a smooth 1-form on the open subset $U \subset \mathbb{R}^n$ such that $\omega(x) \neq 0$ for every $x \in U$. Show that $d\omega = 0$ if and only if $L_X \omega = 0$ for every smooth vector field on U such that $\omega(X) = 0$.