Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

تجزیهٔ گرافهای سه‌بخشی کامل به دورهای ۵ ـ تائی

عباداله محمودیان ـ مریم میرزاخانی

Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences
P. O. Box 11365-9415
Tehran, I. R. IRAN

TR/4
1995

تجزیهٔ گرافهای سه‌بخشی کامل به دورهای ۵ـتائی

عبداله محمودیان ـ مریم میرزاخانی
دانشکدهٔ علوم ریاضی ـ دانشگاه صنعتی شریف

قضیه‌ای از D. Sotteau که شرایط لازم و کافی برای تجزیهٔ گرافهای کامل دو بخشی به دورهای زوج را بیان می‌کند کاربردهای فراوانی در تجزیهٔ گرافها به دورهای زوج دارد. برای بدست آوردن ابزار مشابهی برای تجزیهٔ گرافها به دورهای فرد استفاده از گرافهای دو بخشی به وضوح مناسب نیستند لذا ما به تجزیه گرافهای سه بخشی کامل $K_{r,s,t}$، به ۵ـدورها پرداخته‌ایم. شرایط لازمی برای وجود چنین تجزیه وجود دارد که کافی بودن آنها را در حالت $r = t$ و چند حالت دیگر ثابت کرده‌ایم. حدس ما اینست که این شرایط لازم کافی نیز هستند.

۱. مقدمه

قضیهٔ مهم زیر را Sotteau در [2] اثبات کرده است:

شرط لازم و کافی برای اینکه گراف دو بخشی کامل $K_{m,n}$ را بتوان به ۲kـدورها تجزیه کرد اینست که

(i) $m \geq k, \quad n \geq k$ ؛

(ii) m و n هر دو زوج باشند ؛

(iii) $2k|mn$.

قضیهٔ فوق ابزار بسیار مفیدی برای مسأله تجزیهٔ گراف به دورهاست، اما فقط در حالتی می‌توان از آن استفاده کرد که طول دورها زوج باشد. بنابراین اگر بخواهیم با دورهای فرد کار کنیم مجبوریم به تجزیهٔ گرافهای دیگری مثلاً گرافهای سه بخشی کامل بپردازیم.

تجزیه $K_{r,s,t}$ به ۳ـدورها (مثلثها) ساده است.

گزارهٔ ۱: شرط لازم و کافی برای تجزیه $K_{r,s,t}$ به مثلثها اینست که: $r = s = t$.

اثبات: لازم بودن شرط بدیهی است و برای اثبات کافی بودن آن، کافی است که یک مربع لاتین از اندازهr در نظر گرفت. □

پس حالت بعدی ۵ـدورها خواهد بود.

مثال ۱. گراف سه بخشی کامل $K_{4,2,2}$ را می‌توان به شکل زیر به ۵ـدورها تجزیه کرد
فرض کنید مجموعه‌های $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2\}$ و $C = \{c_1, c_2\}$ رئوس سه بخش این گراف باشند. در این صورت برای تجزیه گراف، دورهای زیر را در نظر بگیرید:

$$(b_1, a_1, c_2, a_3, c_1)\ ,\ (b_2, a_1, c_1, a_2, c_2)\ ,\ (c_2, a_2, b_2, a_3, b_1)\ ,\ (c_1, a_4, b_1, a_4, b_2).$$

۲. شرایط لازم

برای تجزیهٔ گراف سه بخشی کامل $K_{r,s,t}$ به ۵ـدورها شرایط لازم زیر بلافاصله بدست می‌آیند:

قضیه ۱. فرض کنید $r \leq s \leq t$. اگر گراف $K_{r,s,t}$ را بتوان به ۵ـدورها افراز کرد آنگاه شرایط زیر برقرارند:

i) r و s و t یا هر سه زوجند یا هر سه فرد؛

ii) $5|rs + rt + st$؛

iii) $t \leq 4rs/(r + s)$.

اثبات. هر دور ۵ تایی در هر رأس دو یال دارد. بنابراین درجهٔ هر رأس در $K_{r,s,t}$ باید زوج باشد. به عبارت دیگر $r + s$ و $r + t$ و $s + t$ باید اعدادی زوج باشند. از اینجا (i) نتیجه می‌شود.
برای بدست آوردن (ii) کافی است توجه کنیم که هر ۵ـدور حداقل از یک یال و حداکثر از ۳ یال بین دو بخش استفاده می‌کند. بنابراین شش نامساوی زیر بدست می‌آیند:

$$2st/3(s + t) \leq r \leq 4st/(s + t),$$
$$2rt/3(r + t) \leq s \leq 4rt/(r + t),$$
$$2rs/3(r + s) \leq t \leq 4rs/(r + s).$$

البته با توجه به $r \leq s \leq t$، نامساوی $t \leq 4rs/(r + s)$ سایر نامساویها را نتیجه می‌دهد. ■

حدس. سه شرط لازم در قضیهٔ ۱ برای تجزیهٔ $K_{r,s,t}$ به ۵ـدورها کافی نیز هستند. ■
ما این حدس را در حالتی که دو بخش دارای تعداد مساوی رأس باشند و تعداد رئوس بخشها در شرایط لازم صدق کند بجز در حالت $K_{5x,5x,z}$ (که z مضرب ۵ نباشد) ثابت کرده‌ایم. همچنین نتایجی در سایر حالت‌ها

نیز بدست آورده‌ایم.

۳. یک کاربرد

قبل از اینکه بیش از این پیش برویم به بیان یک کاربرد از تجزیهٔ $K_{r,s,t}$ به ۵ـدورها در تجزیهٔ گرافهای کامل به پنج دورها می‌پردازیم.

در سال ۱۹۶۶، Alex Rosa [1] ثابت کرد که:
شرط لازم و کافی برای اینکه گراف کامل K_n را بتوان به ۵ـدورها تجزیه کرد این است که

$$n \equiv 1 \quad \text{یا} \quad 5 \; (\text{پیمانه } 10)$$
.

حال با استفاده از تجزیهٔ $K_{r,s,t}$ به ۵ـدورها کافی بودن شرایط در قضیه Rosa را اثبات می‌کنیم.
برای n دوحالت داریم:

i) $n = 10l + 1$،

ii) $n = 10l + 5$.

i) در این حالت فرض کنید: $r = 10l' + 5$ و $s = 10l'' + 1$ که $l'' = l - 2\lfloor l/3 \rfloor - 1$ و $l' = \lfloor l/3 \rfloor$،
در این صورت $n = r + r + s$. حال با استقرای ریاضی عمل می‌کنیم. بدین‌ترتیب با تجزیهٔ K_r، K_r، K_s و $K_{r,s,t}$ به ۵ـدورها و با کنارهم قراردادن آنها تجزیه‌ای برای K_n پیدا می‌کنیم.
ii) در این حالت‌فرض کنید: $r = 10l' + 5$ و $s = 10l'' + 5$ که l' و l'' همان اعداد تعریف شده در (i) هستند و با استقرای ریاضی، مشابه (i) می‌توانیم یک تجزیه برای K_n به ۵ـدورها پیدا کنیم.

۴. کافی بودن شرایط

در این قسمت به اثبات چند قضیهٔ مفید و ساده در کافی بودن شرایط قضیهٔ ۱ می‌پردازیم. اول یک قضیه در تعمیم تجزیه بیان می‌کنیم.

قضیه ۲. اگر $K_{r,s,t}$ را بتوان به ۵ـدورها تجزیه کرد آنگاه $K_{ar,as,at}$ را نیز میتوان به ۵ـدورها تجزیه کرد.

اثبات: برای اثبات از گزارهٔ ۱ استفاده می‌کنیم. بدین‌ترتیب که ابتدا رئوس هر بخش $K_{ar,as,at}$ را به a دسته با تعداد اعضای مساوی تقسیم می‌کنیم و سپس هر دسته را بعنوان یک رأس در نظر می‌گیریم. گراف جدید $K_{a,a,a}$ را بنا بر گزارهٔ ۱ می‌توان به مثلثها افراز کرد که هرکدام از مثلثها در اصل یک $K_{r,s,t}$ هستند. ■

نتیجه ۱. شرط لازم و کافی برای اینکه $K_{r,r,r}$ را بتوان به ۵ـدورها افراز کرد اینست که $5|r$.

اثبات. بنابه قضیهٔ ۱ (ii): $5|3r^2$ پس $5|r$. برای اثبات کافی بودن شرط $5|r$، بنابر قضیهٔ ۲ کافی است ثابت کنیم که $K_{5,5,5}$ را می‌توان به ۵ـدورها تجزیه کرد. فرض کنید مجموعه‌های $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ و $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ رئوس بخشهای $K_{5,5,5}$ باشند. دراین‌صورت از دورهای پایه‌ای زیر، یک تجزیه‌ازگراف $K_{5,5,5}$ به ۵ـدورها بدست می‌آید:

$$(a_2, b_5, c_1, b_1, c_5)\ ,\ (b_2, c_5, a_1, c_1, a_5)\ ,\ (c_2, a_5, b_1, a_1, b_5)$$

به عبارت دیگر از هر یک از سه دور پنج‌تایی بالا با افزودن اعداد $0, 1, 2, 3, 4$ به اندیسهای a، b و c (به پیمانه ۵) می‌توان ۵ تا دور پنج‌تایی بدست آورد. □

نتیجه ۲. به ازای هر عدد n، گراف $K_{2n,2n,2n}$ را می‌توان به ۵ـدورها تجزیه کرد.

اثبات. در مثال ۱ از بخش ۱، تجزیهٔ $K_{2,2,2}$ به ۵ـدورها ارائه شده است.

نتیجه ۳. به ازای هر عدد m، گراف $K_{m,3m,3m}$ را می‌توان به ۵ـدورها تجزیه کرد.

اثبات. با توجه به قضیه ۲ کافی است تجزیه‌ای برای $K_{1,3,3}$ ارائه دهیم. فرض کنید مجموعه‌های $A = \{a_1\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ و $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ رئوس سه بخش گراف باشند. در این صورت دورهای

$$(i = 1, 2, 3) \qquad (a_1, b_i, c_i, b_{i+1}, c_{i+2}) \qquad (\text{پیمانه } 3)$$

یک تجزیه برای $K_{1,3,3}$ به پنج دورها می‌سازند. □

حال با استفاده از ایدهٔ تجزیه $K_{2n,2n,2n}$ و $K_{m,3m,3m}$، قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۳. گراف سه بخشی کاملی را در نظر بگیرید که تعداد رئوس دو بخش آن با هم برابر باشند (مثلاً $k_{r,r,s}$) و سه تایی (r,r,s) در شرایط لازم در قضیهٔ ۱ صدق کند. دراین‌صورت این گراف را می‌توان به ۵-دورها افراز کرد (مگر احتمالاً در حالتی که $5|r$ و $5 \not| s$).
(مگر احتمالاً در حالتی که $5|r$ و $5 \not| s$).

اثبات. به راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر شرایط مسأله برقرار باشند آنگاه اعداد طبیعی m و n وجود دارند که $r = 3m + 2n$ و $s = m + 4m$.
حال فرض کنید مجموعه‌های $A = \{a_1, \cdots, a_s\}$، $B = \{b_1, \cdots, b_r\}$ و $C = \{c_1, \cdots, c_r\}$ رئوس بخشهای گراف $K_{r,r,s}$ باشند.

- اگر r زوج باشد نتیجتاً s هم زوج است و دورهای پایه‌ای زیر را می‌گیریم:

$$(b_{i+2n-j}, a_{m+j}, c_{i+1}, a_{m+2n+2j-i+2\lfloor i/2 \rfloor}, c_i)$$
$$(c_{i+3m+n+j}, a_{m+n+j}, b_{i+1}, a_{m+2n+2j-i+2\lfloor i/2 \rfloor}, b_i)$$
$$(a_j, b_i, c_{i+3j}, b_{i+2}, c_{i+3j+1})$$
$$i = 1, 2, \ldots, r; \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

که اندیس bها و cها در هنگ r و اندیس aها به هنگ s در نظر گرفته می‌شود.

- r و s هر دو فرد هستند.

$$(b_{i+2n-j}, a_{m+j}, c_{i+1}, a_{m+2n+2j-i+2\lfloor i/2 \rfloor}, c_i)$$
$$(b_{r+2n-j}, a_{m+j}, c_{r+1}, a_{m+n+j}, c_r)$$
$$i = 1, 2, \ldots, r-1; \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$(c_{i+1}, a_{m+n+j}, b_{i+n+2-j}, a_{m+2n+2j-i+2\lfloor i/2 \rfloor}, b_{i+n+1-j})$$
$$(c_r, a_{m+2n+2j-1}, b_{r+n+1-j}, a_{m+2n+2j}, b_{r+n-j})$$
$$(c_1, a_{m+2n+2j}, b_{r+n+2-j}, a_{m+j+n}, b_{r+n+1-j})$$
$$i = 1, 2, \ldots, r-2; \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$(a_j, b_i, c_{i+3j}, b_{i+2}, c_{i+3j+1})$$
$$i = 1, 2, \ldots, r; \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

در این حالت نیز اندیسهای b و c به هنگ r و اندیسهای a به هنگ s حساب می‌شوند. ■

۵. جستجو برای تجزیه در سایر حالت‌ها

حال ممکن است حدس بزنید که شرط $t = r$ نیز لازم است! اما این حدس درست نیست.

لم ۱. اگر $K_{a,b,b}$ و $K_{a,c,c}$ و $K_{b,c,c}$ را بتوان به ۵ـدورها تجزیه کرد آنگاه $K_{a+c,b+c,b+c}$ را نیز می‌توان به ۵ـدورها تجزیه کرد.

اثبات. به مربع لاتین ۲ × ۲ زیر توجه کنید:

	a	c
b	b	c
c	c	b

از این مربع لاتین می‌توان تجزیهٔ $K_{a+c,b+c,b+c}$ را به $K_{b,a,b}$ و $K_{b,c,c}$و $K_{c,a,c}$ و $K_{c,c,b}$ به‌دست آورد، که هر کدام از آنها را می‌توان به پنج دورها افرازکرد. □

به همین ترتیب اثبات لم‌های زیر واضح هستند.

لم ۲. اگر $K_{a,b,b}$ و $K_{c,b,b}$ را بتوان به ۵ـدورها افرازکرد آنگاه $K_{a+c,2b,2b}$ را نیز می‌توان به ۵ـدورها افرازکرد.

لم ۳. اگر $K_{a,b,b}$ و $K_{b,a,a}$ را بتوان به ۵ـدررها تجزیه کرد آنگا $K_{a+b,2a,2b}$ را نیز می‌توان به ۵ـدورها تجزیه کرد.

مثال ۲. $K_{30,20,40}$ را می‌توان به پنج دورها تجزیه کرد.

اثبات. با استفاده از نتیجهٔ ۲، $K_{20,10,10}$ را می‌توان به ۵ـدورها تجزیه کرد. در زیر دو تجزیهٔ دیگر نیز ارائه می‌دهیم.

- $K_{۳,۵,۵}$: اگر رئوس بخشهای آن را $A = \{a, b, c\}$، $B = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $C = \{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ بگیریم. آنگاه دورهای زیر تجزیهٔ به ۵ـدورها برای $K_{۳,۵,۵}$ هستند.

$$a۰۶۱۵ \ a۱۷۲۶ \ a۲۸۳۷ \ a۳۹۴۸ \ a۴۵۰۹ \ b۵۲۹۱ \ c۵۳۶۴ \ c۶b۷۰ \ b۹c۸۰ \ c۳b۴۷ \ b۲c۱۸.$$

- $K_{۴,۱۰,۱۰}$: اگر رئوس بخشهای آن $A = \{a, b, c, d\}$، $B = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ و $C = \{\bar{۰}, \bar{۱}, \bar{۲}, \bar{۳}, \bar{۴}, \bar{۵}, \bar{۶}, \bar{۷}, \bar{۸}, \bar{۹}\}$ باشند، آنگاه تجزیه زیر یک تجزیهٔ به ۵ـدورها خواهد بود.

$$a۱\bar{۱}۲\bar{۲} \ a۲\bar{۳}۱\bar{۴} \ a۳\bar{۱}۴\bar{۳} \ a۴\bar{۲}۱\bar{۵} \ a۵\bar{۲}۶\bar{۱} \ a۶\bar{۳}۳\bar{۶} \ a۷\bar{۷}۶\bar{۰} \ a۸\bar{۶}۰\bar{۸} \ b۱\bar{۶}۲\bar{۴} \ b۲\bar{۵}۳\bar{۷} \ b۳\bar{۴}۰\bar{۵}$$

$$b۴\bar{۶}۵\bar{۳} \ b۵\bar{۵}۶\bar{۶} \ b۶\bar{۴}۷\bar{۸} \ b۷\bar{۲}۹\bar{۱} \ b۸\bar{۱}۰\bar{۲} \ c۱\bar{۷}۰\bar{۹} \ c\bar{۰}۱\bar{۸}۶ \ c۳\bar{۹}۹\bar{۳} \ c\bar{۱}۵\bar{۷}۹ \ c۶۹\bar{۵}۴ \ c۲\bar{۷}۸\bar{۸}$$

$$c۵\bar{۸}۳\bar{۲} \ d۱\bar{۹}۴\bar{۸} \ d۳\bar{۰}۹\bar{۴} \ d\bar{۰}۵\bar{۹}۶ \ d۷\bar{۰}۴\bar{۷} \ d۲\bar{۰}۸\bar{۳} \ d\bar{۶}۷\bar{۵}۸ \ d\bar{۱}۷\bar{۳}۰ \ d\bar{۹}۲\bar{۸}۹ \ d۵\bar{۴}۸\bar{۲} \ \bar{۰}b۹a۰$$

$$\bar{۹}b۰c۸ \ ۷c\bar{۷}a\bar{۹} \ ۴d\bar{۵}c\bar{۴}.$$

بنابراین $K_{۶,۱۰,۱۰}$ بنابر نتیجهٔ ۲ قابل تجزیهٔ به ۵ـدورها است و $K_{۱۰,۲۰,۲۰}$ نیز بنابر لم ۲ و با استفاده از تجزیه $K_{۶,۱۰,۱۰}$ و $K_{۴,۱۰,۱۰}$ قابل تجزیه به ۵ـدورها است.
در نتیجه $K_{۳۰,۲۰,۲۰}$ بنابر لم ۳ و قابل تجزیه بودن $K_{۱۰,۲۰,۲۰}$ و $K_{۲۰,۱۰,۱۰}$ قابل تجزیه به ۵ـدورها است. □

مراجع

[1] A. Rosa. O cyklických rozkladoch kompletného grafu na nepárnouholníky. Čas. Pěst. Mat., 91:53–63, 1966.

[2] D. Sotteau. Decomposition of $K(m, n)$ into cycles (circuits) of length $2k$. *J. of Combinatorial Theory B*, 30:75–81, 1981.