ریشه‌های یک مسأله‌ی المپیاد جهانی ریاضی سال ۱۹۹۷

سید عباداله محمودیان و محمد مهدیان *

۶ شهریور ۱۳۸۶

چکیده

در آخرین المپیاد جهانی ریاضی یک مسأله پیشنهادی از ایران (مسأله‌ی ۴ در IMO97) داده شده بود که از نوع ترکیبیاتی است. در این مقاله، ما ریشه‌های این مسأله و ارتباط آن را با سایر مسائل پژوهشی در «مجموعه‌های تعیین کننده» در رنگ‌آمیزی گراف‌ها و «مجموعه‌های بحرانی» در مربع‌های لاتین بررسی می‌کنیم. همچنین چند مسأله‌ی حل نشده مطرح خواهیم کرد.

۱ مسأله

مسأله‌ی چهارم المپیاد جهانی ریاضی امسال (IMO97) به صورت زیر است [یک]:

مسأله . یک ماتریس $n \times n$ که درایه‌های آن از مجموعه‌ی $S = \{۱, ۲, \ldots, ۲n - ۱\}$ انتخاب شده‌اند، ماتریس نقره‌ای نامند اگر بازای $i = ۱, \ldots, n$، سطر iام و ستون iام روی هم اعضای S را شامل شوند. نشان دهید:

(الف) هیچ ماتریس نقره‌ای برای $n = ۱۹۹۷$ وجود ندارد.

*با تشکر از باشگاه دانش پژوهان جوان به‌خاطر حمایت مالی از قسمتی از این پژوهش.

(ب) ماتریس‌های نقره‌ای به ازای تعداد نامتناهی از n وجود دارد.

این مسأله جزو مسائل پیشنهادی ایران بود که در المپیاد جهانی ریاضی برای مسابقه برگزیده شد. در این‌جا درباره‌ی ریشه‌های این مسأله و ارتباط آن با بعضی از مفاهیم ترکیبیات و نظریه‌ی گراف بحث خواهیم کرد و در انتها به تشریح چند مسأله‌ی حل نشده خواهیم پرداخت. ولی ابتدا راه حل طراحان این مسأله را می‌بینیم:

حل. (الف) فرض کنید یک ماتریس نقره‌ای A از مرتبه‌ی n ($n > ۱$) وجود دارد. عنصر x را یک عنصر ثابت بگیرید که روی قطر A نیامده است. (چنین عنصری حتماً وجود دارد، چون تنها n درایه روی قطر A موجود است، ولی تعداد کل عناصر مجموعاً $۲n - ۱$ است.) برای هر i، این x دقیقاً یک بار در $R_i \cup C_i$، اجتماع سطر iام و ستون iام، آمده است. در حقیقت اگر x در درایه (i, j) از A آمده باشد، در این صورت x دیگری در سطر iام و یا در ستون jام A وجود نخواهد داشت. بنابراین برای هر بار ظاهر شدن عنصر x در ماتریس A، دو درایه قطری (i, i) و (j, j) متناظر با آن وجود دارند. علاوه بر این، هر درایه قطری (i, i) با یک ظاهر شدن x متناظر است. بنابراین درایه‌های روی قطر A به مجموعه‌های ۲ عضوی (که هر مجموعه متناظر با یک بار ظاهر شدن x در A است) افراز می‌شوند. پس n یک عدد زوج است. ولی ۱۹۹۷ یک عدد فرد است.
(ب) برای $n = ۲$ ماتریس نقره‌ای $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ وجود دارد.
ساختار زیر نشان می‌دهد که اگر یک ماتریس نقره‌ای $n \times n$ مانند A وجود داشته باشد، می‌توانیم یک ماتریس $۲n \times ۲n$ به صورت زیر بسازیم:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & A \end{array}\right],$$

که در این‌جا B یک ماتریس $n \times n$ است که با اضافه کردن عدد $۲n$ به هر یک از درایه‌های A به دست آمده است و C نیز ماتریسی است که با جایگزین کردن عدد $۲n$ به جای همه‌ی درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس B دست آمده است. □

همان‌طور که در اثبات فوق دیدیم، هیچ ماتریس نقره‌ای از مرتبه‌ی فرد بزرگتر از ۱ وجود ندارد. در بخش بعد خواهیم دید که برای هر عدد زوج n، یک ماتریس نقره‌ای از مرتبه‌ی n وجود دارد.

۲ مجموعه‌های تعیین کننده در رنگ‌آمیزی گراف‌ها

برای تعریفهای مربوط به گراف که در این مقاله نیامده است، می‌توانید به مرجع [۱] مراجعه کنید. یک k—**رنگ‌آمیزی** از یک گراف G عبارت است از نسبت دادن k رنگ متفاوت به رئوس آن به طوری که هیچ دو رأس مجاور رنگ‌های یکسانی نگرفته باشند. **عدد رنگ‌آمیزی (رأسی)** گراف G که با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود، کوچک‌ترین عدد k است که برای آن G یک k—رنگ‌آمیزی داشته باشد. در یک گراف داده شده‌ی G، یک مجموعه‌ی S از رئوس با رنگهای متناظر با آنها، یک **مجموعه‌ی تعیین کننده‌ی k—رنگ‌آمیزی** خوانده می‌شود، اگر تنها به یک صورت بتوان رنگ‌های رئوس S را به یک k—رنگ‌آمیزی همه‌ی رئوس G گسترش داد. یک مجموعه‌ی تعیین کننده با کم‌ترین تعداد عناصر، یک **مجموعه‌ی تعیین کننده‌ی کمینه**، و تعداد عناصر آن **عدد تعیین کننده‌ی** G نامیده می‌شود و با $d(G,k)$ نشان داده می‌شود.

برای مثال در مورد یک گراف دوبخشی همبند G، داریم $d(G,\chi(G)) = ۱$ و برای گراف پیترسون P، داریم $d(P,۳) = ۴$. نتایج متعددی در مورد عدد تعیین کننده‌ی گراف‌ها در مراجع [۵]، [٦]، [۷]، [۸]، و [۹] وجود دارد.

مفهوم مجموعه‌های تعیین کننده قبلاً در مورد طرح‌های بلوکی مورد مطالعه قرار گرفته است (مرجع [۱۱] را ببینید.) و همچنین تحت عنوان «مجموعه‌ی بحرانی» برای مربع‌های لاتین مورد بررسی قرار گرفته است. یک **مربع لاتین** یک ماتریس $n \times n$ از عددهای $۱,۲,\ldots,n$ است به طوری که هر یک از این عددها دقیقاً یک بار در هر یک از سطرها و در هر یک از ستون‌های ماتریس آمده باشد. یک **مجموعه‌ی بحرانی** در یک آرایه‌ی $n \times n$، یک مجموعه‌ی S از درایه‌ها است که با داشتن آنها فقط به یک صورت بتوان بقیه‌ی درایه‌های ماتریس را پر کرد به گونه‌ای که ماتریس حاصل یک مربع لاتین شود. مقاله‌هایی در مورد مجموعه‌های بحرانی در مربع‌های لاتین وجود دارد. برای مثال می‌توانید [۳] و [۱۰] را ببینید. یکی از نویسندگان این مقاله، برای اولین بار مفهوم مجموعه‌های تعیین کننده را برای یک $\chi(G)$—رنگ‌آمیزی از گراف G مطرح کرد. پریتکین و مورل (مرجع [۸]) این مفهوم را برای k—رنگ‌آمیزی گراف‌ها برای $k \geq \chi(G)$ تعمیم دادند. کار ایشان همان طوری که در زیر خواهیم دید باعث ایجاد مسائل بسیار جالبی شده و راه را برای پژوهش بیشتر دربارهٔ این موضوع گشود. مفهوم مجموعه‌های بحرانی در مربع‌های لاتین، و در نتیجه مجموعه‌های تعیین کننده در رنگ‌آمیزی گرافها دارای کاربرد

در مبحث رمزنگاری است. به مرجع رجوع [۴] شود.

حاصلضرب دکارتی دو گراف G و H که با علامت $G \times H$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود: مجموعه‌ی رئوس آن مجموعه‌ی $V(G) \times V(H)$ است و دو رأس $(u_۱, v_۱)$ و $(u_۲, v_۲)$ به هم متصلند اگر و فقط اگر یا $u_۱ = u_۲$ و $v_۱$ و $v_۲$ در H به هم متصل باشند و یا $v_۱ = v_۲$ و $u_۱$ و $u_۲$ در G به هم متصل باشند. به عبارت دیگر $G \times H$ گرافی است که شامل $|V(H)|$ کپی «افقی» از G و $|V(G)|$ کپی «عمودی» از H است. کپی «افقی» iام و کپی «عمودی» jام دقیقاً در یک رأس با هم مشترکند که این رأس را (i, j) می‌نامیم.

حاصل‌ضرب دکارتی $K_n \times K_n$ برای ما جالب توجه است. یک رنگ‌آمیزی این گراف با n رنگ، چیزی نیست مگر یک مربع لاتین. بنابراین مسأله‌ی پیدا کردن کوچک‌ترین مجموعه‌ی بحرانی در یک مربع لاتین $n \times n$ همان مسأله‌ی تعیین $d(K_n \times K_n, n)$ است.

به سادگی دیده می‌شود که برای هر $k > ۲n - ۱$ داریم: $d(K_n \times K_n, k) = n^۲$. ولی چنان‌چه در قضیه‌ی زیر دیده می‌شود، تعیین $d(K_n \times K_n, ۲n - ۱)$ مسأله‌ی ساده‌یی نیست.

گزاره ۱. داریم $d(K_n \times K_n, ۲n - ۱) \geq n^۲ - n$

اثبات. فرض کنید که S یک مجموعه‌ی تعیین کننده در $K_n \times K_n$ باشد. نشان می‌دهیم که $V(K_n \times K_n) \backslash S$ یک مجموعه‌ی مستقل از رئوس است. فرض کنید که این طور نباشد و u و v دو رأس در $V(K_n \times K_n) \backslash S$ باشند که به هم متصل‌اند. ادعا می‌کنیم که حتا اگر رنگ همه‌ی رئوس به‌جز u و v معلوم باشد، نمی‌توانیم رنگ u و v را به طور یکتا مشخص کنیم. برای این موضوع، کافی است به این نکته توجه کنیم که در این صورت، برای هر کدام از دو رأس u و v لااقل دو رنگ باقی مانده است که در همسایگی آن ظاهر نشده است و بنابراین هر کدام از این رئوس می‌تواند با هر یک از این دو رنگ، رنگ‌آمیزی شود. حال اگر u را با هر کدام از این دو رنگ، رنگ کنیم، برای v هم لااقل یک امکان باقی می‌ماند. پس حداقل دو روش مختلف برای رنگ‌آمیزی u و v داریم. این تناقض نشان می‌دهد که $V(K_n \times K_n) \backslash S$ یک مجموعه‌ی مستقل از رئوس است. ولی می‌دانیم که اندازه‌ی هر مجموعه‌ی مستقل در $K_n \times K_n$ حداکثر برابر با n است. بنابراین $|S| \geq n^۲ - n$. □

در این جا طبیعی است که بپرسیم: برای چه مقادیری از n، $d(K_n \times K_n, ۲n-۱) = n^۲-n$؟ در زیر نشان می‌دهیم که تنها در صورتی که n یک عدد زوج باشد این تساوی برقرار می‌شود.

قضیه ۱. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت یک ماتریس نقره‌ای از مرتبه‌ی n وجود دارد اگر و فقط اگر $d(K_n \times K_n, ۲n-۱) = n^۲ - n$.

اثبات. اول فرض کنید که یک ماتریس نقره‌ای $L = [L_{ij}]$ از مرتبه‌ی n وجود دارد. در این صورت رأس (i,j) در $K_n \times K_n$ را با رنگ L_{ij} رنگ کنید. حال S را مجموعه‌ی همه‌ی رئوس $K_n \times K_n$ به استثنای رئوس روی قطر می‌گیریم. با توجه به تعریف ماتریس نقره‌ای، رئوس مجموعه‌ی S به همراه رنگی که به آن‌ها نسبت داده شده است، تشکیل یک مجموعه‌ی تعیین‌کننده از اندازه‌ی $n^۲ - n$ برای $K_n \times K_n$ می‌دهد و بنا به گزاره‌ی ۱ یک مجموعه تعیین‌کننده می‌نیمم است.

اکنون فرض کنید S یک مجموعه‌ی تعیین کننده از اندازه‌ی $n^۲ - n$ برای $K_n \times K_n$ باشد. با توجه به اثبات گزاره‌ی ۱ مجموعه‌ی رئوسی که در S نیستند، یک مجموعه‌ی مستقل از اندازه‌ی n در $K_n \times K_n$ هستند. با جابه‌جا کردن کپی‌های افقی K_n در $K_n \times K_n$، می‌توانیم مجموعه‌ی تعیین کننده‌ی دیگری از اندازه‌ی $n^۲ - n$ برای $K_n \times K_n$ بسازیم که شامل همه‌ی رئوس $K_n \times K_n$ به جز رئوس قطری باشد. به سادگی می‌توان دید ماتریسی که با رنگ‌آمیزی مربوط به این مجموعه‌ی تعیین کننده متناظر است، یک ماتریس نقره‌ای است. $\square$

قضیه‌ی مشهوری است که برای هر عدد زوج n می‌توان یال‌های گراف K_n را با $n - ۱$ رنگ رنگ‌آمیزی کرد. چنین رنگ‌آمیزی را می‌توان از روی یک جدول زمان‌بندی برای یک تورنمنت با n تیم به دست آورد. راه حل این مسأله در اغلب کتاب‌های ترکیبیات به عنوان مثال در مرجع [۲] وجود دارد. در لم زیر، یک روش ساخت برای چنین رنگ‌آمیزی‌یی ارائه می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که اگر $n \neq ۴$ باشد، در این صورت یک **ترانسورسال**[۱] در رنگ‌آمیزی ساخته شده وجود دارد. منظور از یک ترانسورسال، یک تطابق کامل (مجموعه‌ای فراگیر از یالهای مستقل) است که یال‌های آن با رنگ‌های متفاوت رنگ‌آمیزی شده باشند. این لم در اثبات قضیه‌ی ۳ و قضیه‌ی ۲ کاربرد دارد.

---
[۱] Transversal

لم ۱. فرض کنید n یک عدد زوج است. در این صورت $\chi'(K_n) = n - 1$. علاوه بر این اگر $n \neq 4$، آنگاه یک $(n-1)$−رنگ‌آمیزی یالی از K_n وجود دارد که دارای یک ترانسورسال است.

اثبات. رأس‌های K_n را با عناصر مجموعه‌ی $\{\infty, 0, 1, \ldots, n-2\}$ شماره‌گذاری می‌کنیم. یک رنگ‌آمیزی یالی از K_n با مجموعه‌ی رنگ‌های $\{0, 1, 2, \ldots, n-2\}$ به این صورت معرفی می‌کنیم: یال‌های با رنگ i، $i = 0, 1, 2, \ldots, n-2$؛ عبارت‌اند از: $\{\{\infty, i\}, \{i-1, i+1\}, \{i-2, i+2\}, \ldots, \{i - \frac{n}{2} + 1, i + \frac{n}{2} - 1\}\}$ $(n-1$ سنج$)$.
حال نشان می‌دهیم که این رنگ‌آمیزی یک ترانسورسال دارد. اگر $n \equiv 2$ (سنج 4)، آنگاه مجموعه‌ی یال‌های $\{\{\infty, 0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{n-3, n-2\}\}$ تشکیل یک ترانسورسال می‌دهند، اگر $n = 8$، آنگاه مجموعه‌ی $\{\{\infty, 0\}, \{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$ یک ترانسورسال است، و در نهایت اگر $n \equiv 0$ (سنج 4) و $n > 8$، آنگاه مجموعه‌ی یال‌های

$$\{\{\infty, 0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{n-3, n-2\}\} \setminus \{\{\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}\}, \{\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2\},$$
$$\{\frac{n}{2} + 3, \frac{n}{2} + 4\}\} \cup \{\{\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1\}, \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 4\}, \{\frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 3\}\}$$

یک ترانسورسال است. $\square$

قضیه ۲. اگر n یک عدد زوج باشد، در این صورت $d(K_n \times K_n, 2n-1) = n^2 - n$.

اثبات. فرض کنید c یک $(n-1)$−رنگ‌آمیزی یالی از K_n باشد و رنگ یال $\{i, j\}$ در این رنگ‌آمیزی را با $c(i, j)$ نشان دهید. با استفاده از این رنگ‌آمیزی می‌توان یک ماتریس نقره‌ای $L = [L_{ij}]$ به صورت زیر ساخت:

$$L_{ij} = \begin{cases} c(i,j) & i < j \\ c(i,j) + n - 1 & i > j \\ 2n - 1 & i = j. \end{cases}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که L یک ماتریس نقره‌ای است. $\square$

قضیه ۳. اگر n یک عدد فرد بزرگ‌تر از یک باشد، $d(K_n \times K_n, ۲n-۱) = n^۲ - n + ۱$.

اثبات. برای $n = ۵$ یک رنگ‌آمیزی خاص رأسی $K_۵ \times K_۵$ را می‌توان از ماتریس زیر به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۹ & ۳ & ۲ & ۷ \\ ۵ & ٦ & ۹ & ۱ & ۴ \\ ٦ & ۵ & ۷ & ۹ & ۸ \\ ۷ & ۱ & ۸ & ۴ & ۹ \end{bmatrix}.$$

و این رنگ‌آمیزی نشان می‌دهد که $d(K_۵ \times K_۵, ۹) = ۲۱$. (رنگ رأس‌های $(۱,۱)$، $(۲,۲)$، $(۳,۳)$، و $(۴,۴)$ را می‌توان، در صورتی که رنگ بقیه‌ی رأس‌ها داده شده باشد، به صورت یکتا تعیین کرد.) حالا فرض کنید که $n \neq ۵$ یک عدد فرد باشد. با استفاده از لم ۱ یک $(n-۲)$–رنگ‌آمیزی یالی c برای $K_{n-۱}$ وجود دارد که یک ترانسورسال هم داشته باشد. رأس‌های $K_{n-۱}$ را با عددهای $\{۱,۲,۳,\ldots,n-۱\}$ طوری شماره‌گذاری می‌کنیم که یال‌های $\{۱,۲\}$، $\{۳,۴\}$، ...، و $\{n-۲,n-۱\}$ تشکیل یک ترانسورسال بدهند و برای هر k که $۱ \leq k \leq \frac{n-۱}{۲}$، داشته باشیم $c(۲k-۱,۲k) = k$. حال یک ماتریس $n \times n$ به نام L را به صورت زیر می‌سازیم: برای هر k که $۱ \leq k \leq \frac{n-۱}{۲}$، قرار می‌دهیم $L_{۲k-۱\ ۲k} = ۲n-۳$، $L_{۲k\ ۲k-۱} = ۲n-۲$، $L_{۲k-۱\ n} = k$، $L_{n\ ۲k-۱} = k+n-۲$، $L_{۲k\ n} = k+n-۲$، و $L_{n\ ۲k} = k$. برای بقیه‌ی درایه‌ها قرار می‌دهیم $L_{ij} = c(i,j)$ در صورتی که $i < j$ و $L_{ij} = c(i,j)+n-۲$ در صورتی که $i > j$. همچنین برای هر $۱ \leq i \leq n$ قرار می‌دهیم $L_{ii} = ۲n-۱$. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که برای هر i $(۱ \leq i < n)$، اجتماع سطر iام و ستون iام L، شامل همه‌ی عناصر مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۲n-۱\}$ می‌شود. بنابراین اگر رأس‌های $K_n \times K_n$ را طبق ماتریس L رنگ کنیم، در این صورت یک رنگ‌آمیزی رأسی خاص از $K_n \times K_n$ خواهیم داشت که مجموعه‌ی همه‌ی رأس‌های $K_n \times K_n$ به جز رأس‌های مجموعه‌ی $\{(i,i) | ۱ \leq i < n\}$ یک مجموعه‌ی تعیین کننده از اندازه‌ی $n^۲ - n + ۱$ برای $K_n \times K_n$ خواهد بود. $\square$

۳ مسایلی دیگر

در این بخش چند مسأله باز که با مفهوم مجموعه‌های تعیین کننده ارتباط دارد می‌آوریم. در بخش قبلی مقدار $d(K_n \times K_n, ۲n - ۱)$ را به طور دقیق پیدا کردیم. مسأله زیر یک سؤال طبیعی است:

مسأله ۱. مقدار $d(K_n \times K_n, k)$ را برای $n < k < ۲n - ۱$ پیدا کنید.

در حالت $k = n$ به‌نظر می‌رسد که مسأله‌ی دشواری است. حدس زیر به طور مستقل بیان شده است:

حدس . ([۵] و [۱۰]) $d(K_n \times K_n, n) = \lfloor \frac{n^۲}{۴} \rfloor$.

ع. محمودیان مبلغ ۱،۰۰۰،۰۰۰ ریال برای پاسخ دهنده این حدس جایزه تعین کرده است.

مانند اثبات گزاره‌ی ۱ می‌توان نشان داد که: هرگاه S یک مجموعه تعیین کننده $(r + ۱)$–رنگ‌آمیزی برای یک گراف r–منتظم G باشد آنگاه $V(G)\backslash S$ مجموعه‌ای از رئوس مستقل خواهد بود. بنابراین برای این نوع گراف‌ها داریم: $d(G, r + ۱) \geq |V(G)| - \alpha(G)$، که در آن جا $\alpha(G)$ عدد استقلال گراف G است. حال سؤال زیر را می‌کنیم:

مسأله ۲. دسته گراف‌های r–منتظم G را تعیین کنید که برای آنها عدد تعیین کننده می‌نیمم $(r + ۱)$–رنگ آمیزی برابر $|V(G)| - \alpha(G)$ است.

مراجع

[یک] چهار مسأله، نشر ریاضی: مجلهٔ ریاضی مرکز نشر دانشگاهی، **۸** شمارهٔ پیاپی: ۱٦ مهر ۱۳۷٦ صفحه ۵۴

[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, American Elsevier Publishing Co., INC., New York, 1976.

[2] P. J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[3] J. Cooper, D. Donovan, and J. Seberry, *Latin squares and critical sets of minimal size*, Australa. J. Combin., **4** (1991), 113–120.

[4] J. Cooper, D. Donovan, and J. Seberry, *Secret sharing schemes arising from latin squares*, Bull. Inst. Comb. Appl. **12** (1994), 33–43.

[5] E. S. Mahmoodian, *Some problems in graph colorings*, in Proc. 26th Annual Iranian Math. Conference, S. Javadpour and M. Radjabalipour, eds., Kerman, Iran, Mar. 1995, Iranian Math. Soc., University of Kerman, 215–218.

[6] E. S. Mahmoodian and E. Mendelsohn, *On defining numbers of vertex coloring of regular graphs*, (submitted).

[7] E. S. Mahmoodian, R. Naserasr, and M. Zaker, *Defining sets of vertex coloring of graphs and latin rectangles*, Discrete Mathematics, **167/168** (1997) 451–460.

[8] T. Morrill and D. Pritikin, *Defining sets and list–defining sets in Graphs*, (preprint).

[9] R. Naserasr, E. S. Mahmoodian, M. Mahdian, and F. Harary, *Defining sets of vertex coloring of the cartesian product of a cycle with a complete graph*, Proceedings of Eighth International Conference on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications, Western Michigan University, Kalamazoo 1996 (to appear).

[10] G. H. J. van Rees and J. A. Bate, *The size of the smallest strong critical set in a latin square*, Ars Combin., (submitted).

[11] A. P. Street, *Defining sets for block designs: An update*, in Combinatorics Advances, C. J. Colbourn and E. S. Mahmoodian, eds., Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1995, 307–320.