بنام او

میرامیر حاجی میرصادقی
۸۷۲۰۰۸۲۴

حل تمرین ۱۰.۱.۲۴ باندی و مورتی (۲۰۰۸)

فرض همبند بودن برای قسمت b و c لازم است

a) فرض کنید λ مقدار ویژه نظیر بردار $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0$ باشد. فرض کنید x_k بزرگترین قدر مطلق را در بین xها داشته باشد. داریم

$$AX=\lambda X \Rightarrow \sum_j a_{kj} x_j = \lambda x_k$$

با توجه به نامنفی بودن a_{kj} ها و این مطلب که $\sum a_{kj} = d(v_k)$ به دست می‌آید

$$|\lambda||x_k| = \left|\sum_j a_{kj} x_j\right| \le \sum_j a_{kj} |x_j| \le \sum_j a_{kj} |x_k|$$
$$= d(v_k)|x_k| \le \Delta |x_k| \qquad (*)$$

بنابراین $|\lambda| \le \Delta$

b) اگر $\lambda=\Delta$، نامساوی های $(*)$ باید تبدیل به تساوی شوند. در نتیجه $d(v_k)$ باید برابر Δ باشد و برای تمام همسایه‌های v_k مانند v_j، $|x_j|=|x_k|$ (توجه کنید که a_{kj} مثبت است اگر و فقط اگر v_k و v_j همسایه باشند) با تکرار استدلال مشابه برای همسایه‌های v_k ~~با توجه به همبندی گراف~~ درجه رئوس در یک مولفه همبندی Δ است و چون گراف همبند است، به دست می‌آید درجه همه رئوس باید Δ باشد. مثال زیر لزوم شرط همبندی را نشان می‌دهد.

c) مشابه قسمت قبل به راحتی به دست می‌آید برای هر j، $|x_k|=|x_j|$ درجه همه رئوس Δ است. به علاوه تساوی $\sum_j a_{kj}x_j = \lambda x_k$ و نامنفی بودن a_{kj} ها نشان می‌دهد برای jهایی که v_j همسایه v_k است، علامت x_k و x_j متفاوت است. بنابراین علامت x_iها یک دورنگ‌آمیزی گراف را می‌دهد. یعنی گراف دوبخشی است.