بیست و هفتمین مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

سوالات نوبت اول

دانشگاه بوعلی سینا — تاریخ: ۱۳۸۲/۲/۲۴ — وقت: سه ساعت و نیم

---

۱) فرض کنید $n > ۱$ عددی طبیعی و ثابت باشد. مجموعهٔ تمام ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های حقیقی را با $M_n(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. روی $M_n(\mathbb{R})$ متریک زیر را تعریف می‌کنیم. به ازای $A = [A_{ij}]$ و $B = [B_{ij}]$،

$$d(A, B) = \max\{|A_{ij} - B_{ij}| \ : \ i, j = ۱, \cdots, n\}.$$

ثابت کنید $GL(n, \mathbb{R})$، مجموعهٔ ماتریسهای نامنفرد $n \times n$، یک زیر مجموعهٔ باز و ناهمبند از $M_n(\mathbb{R})$ است.

۲) فرض کنید f تابعی مختلط باشد که روی $\mathbb{C}$ تحلیلی است. فرض کنید L و M دو خط عمود بر هم با نقطهٔ تلاقی A باشند بطوریکه $f(L) = L$ و $f(M) = M$. اگر $z_۱$ و $z_۲$ دو عدد مختلط و متقارن نسبت به A باشند، ثابت کنید $f(z_۱)$ قرینهٔ $f(z_۲)$ نسبت به A است.

۳) دنبالهٔ $\{a_n\}$ از اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_۰ = ۰, \quad a_۱ = b, \quad a_{n+۱} = a_n\sqrt{۱ + a_{n-۱}^۲} + a_{n-۱}\sqrt{۱ + a_n^۲} \ , \ n \geq ۱$$

a_n را بر حسب b تعیین کنید.

۴) فرض کنید K مجموعه‌ای ناتهی باشد و $\emptyset \neq I \subseteq K$. فرض کنید $\{A_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های K باشد. ثابت کنید اگر

$$\{i \ : \ i \notin A_i\} \in \{A_i \ : \ i \in I\} \cup \{\emptyset\}$$

آنگاه به ازای هر $i \in I$، $i \in A_i$.

۵) فرض کنید A یک ماتریس ۲×۳ و B یک ماتریس ۳×۲ با درایه‌های مختلط باشند که

$$AB = \begin{bmatrix} ۸ & ۲ & -۲ \\ ۲ & ۵ & ۴ \\ -۲ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}.$$

ماتریس BA را مشخص کنید. (راهنمایی: $(AB)^۲$ را محاسبه کنید.)

۶) فرض کنید G یک گروه باشد و H زیر گروهی از آن بطوریکه برای هر $x \in G\backslash H$ و هر $y \in G$، عضو $u \in H$ موجود است که $y^{-۱}xy = u^{-۱}xu$. ثابت کنید H در G نرمال است و G/H آبلی می‌باشد.

بیست و هفتمین مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

سوالات نوبت دوم

دانشگاه بوعلی سینا | تاریخ: ۱۳۸۲/۲/۲۴ | وقت: سه ساعت و نیم

---

۷) فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، $a,b\in\mathbb{R}$ و $a<b$. اگر $f(a)=f(b)=0$، $f'(a)>0$ و $f'(b)>0$، ثابت کنید f' در بازهٔ (a,b) حداقل دو ریشه دارد.

۸) ثابت کنید که فاصلهٔ $[0,1]$ را **نمی‌توان** به صورت اجتماعی از بازه‌های بستهٔ دو به دو مجزا با طول مثبت و کمتر از واحد نوشت.

۹) فرض کنید $\mathcal{D}$ زیر مجموعه‌ای شمارا از صفحهٔ اقلیدسی، یعنی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$، باشد. ثابت کنید افرازی برای $\mathcal{D}$ به دو زیر مجموعهٔ X و Y وجود دارد به طوریکه هر خط موازی محور x، با X اشتراک متناهی داشته باشد و هر خط موازی محور y، با Y اشتراک متناهی داشته باشد.

۱۰) فرض کنید $A_1،\cdots،A_n$ خانواده‌ای از مجموعه‌های متناهی باشد و $S=\cup_{i=1}^{n}A_i$. فرض کنید عدد ثابت k، $1\leq k\leq n$، در شرایط زیر صدق کند:

الف) اجتماع هر k تا از خانوادهٔ $A_1،\cdots،A_n$ مساوی S باشد،

ب) اجتماع هر $k-1$ تا از خانوادهٔ $A_1،\cdots،A_n$ مساوی S نباشد،

ج) $|S|=\left(\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array}\right)$.

تعداد اعضای هر یک از A_i ها را پیدا کنید.

۱۱) فرض کنید a و b دو عدد طبیعی باشند که $(a,b)=1$ ب.م.م. ثابت کنید

$$\mathrm{ord}_{ab}(a+b)=\text{ک.م.م}\,[\mathrm{ord}_b a,\mathrm{ord}_a b].$$

(منظور از $\mathrm{ord}_n m$، مرتبهٔ m به هنگ n می‌باشد.)

۱۲) فرض کنید R و R' دو حلقه باشند که تمام اعضایشان خودتوان هستند و $f:R\longrightarrow R'$ را تابعی یک به یک و پوشا در نظر بگیرید که برای هر $x,y\in R$، $f(xy)=f(x)f(y)$. ثابت کنید $R\simeq R'$.