جلسه اول ۸۳/۲/۲۲ **مدت امتحان : ۳/۵ ساعت**

۱) ثابت کنید هر تابع مختلط یک‌به‌یک و تام، به شکل $f(z) = az + b$ می‌باشد که در آن a و b اعداد مختلط ثابتی هستند و $a \neq ۰$.

۲) فرض کنید $d_۱$ و $d_۲$ به ترتیب متریک‌های اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^۲$ باشند، $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ : x = ۰ \text{ یا } y = ۰\}$ و $d = d_۲|_A$ متریک القا شده از $\mathbb{R}^۲$ روی A باشد. ثابت کنید اگر $f : (\mathbb{R}, d_۱) \longrightarrow (A, d)$ پیوسته و پوشا باشد، آنگاه $f^{-۱}\{(۰, ۰)\}$ حداقل سه عضو دارد.

۳) فرض کنید f یک تابع حسابی باشد با این ویژگی که برای هر عدد طبیعی n، $\sum\limits_{d|n} f(d) = n^۲$ ($\sum\limits_{d|n}$ یعنی مجموع روی مقسوم‌علیه‌های مثبت n). اگر ϕ تابع فی اویلر باشد ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n > ۱$،

$$\frac{f(n)}{\phi(n)} = n \prod_{p|n \text{ اول}} (۱ + \frac{۱}{p}).$$

۴) فرض کنید G زیرگروهی از S_n باشد با این ویژگی که برای هر $۱ \leq i \leq n$ و هر $۱ \leq j \leq n$، عضو $\sigma \in G$ موجود باشد که $\sigma(i) = j$. ثابت کنید برای هر $۱ \leq k \leq n$، $G_k \cap Z(G) = \{e\}$ که در آن $G_k = \{\tau \in G : \tau(k) = k\}$، $Z(G)$ مرکز گروه G و e عضو همانی G است.

۵) فرض کنید A مجموعهٔ تمام بردارهای n مؤلفه‌ای با درآیه‌های صفر و یک باشد به طوری که تعداد درآیه‌های ۱ در هر بردار فرد است. بیشترین تعداد بردارهایی از مجموعهٔ A که دوبه‌دو تعداد زوج درآیهٔ ۱ مشترک دارند را با ذکر دلیل تعیین کنید.

٦) فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعهٔ n عضوی به طور جزئی مرتب (بازتابی، پادمتقارن و متعدی) باشد. برای هر عضو $i \in P$ قرار دهید $U_i = \{j : j \in P, j > i\}$ و $L_i = \{j : j \in P, j < i\}$. فرض کنید به هر عضو P مانند i عدد حقیقی X_i با شرط زیر نسبت داده شده باشد.

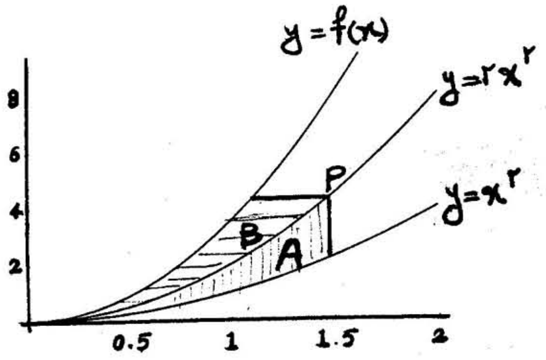
$$X_i = \begin{cases} \dfrac{۱ - \sum\limits_{j \in L_i} X_j}{n - |U_i|} & \text{اگر } L_i \neq \emptyset \\[2ex] \dfrac{۱}{n - |U_i|} & \text{اگر } L_i = \emptyset \end{cases}$$

ثابت کنید برای هر $i \in P$ داریم $۰ \leq X_i \leq ۱$.

موفق باشید.

جلسه دوم ۸۳/۲/۲۳ مدت امتحان : ۳/۵ ساعت

۱) فرض کنید در شکل روبرو تابع f یک‌به‌یک و پیوسته باشد و به ازای هر نقطهٔ P روی منحنی $y = ۲x^۲$، مساحت نواحی A و B با هم برابر باشند. ضابطه تابع f را مشخص کنید.



۲) فرض کنید $f : [a, b] \to (a, b)$ تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، عدد مثبتی مانند α و $c \in (a, b)$ چنان موجودند که

$$f(c) + f(c + \alpha) + \cdots + f(c + n\alpha) = (n + ۱)(c + \frac{n}{۲}\alpha)$$

۳) ماتریس O را متعامد می‌نامیم هرگاه $OO^t = O^tO = I$. فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی متعامد با درآیه‌های در $\mathbb{C}$ باشند و $\det(A) + \det(B) = ۰$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $\det(A + B) = ۰$؟ چرا؟

۴) فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد و عدد طبیعی n موجود باشد با این ویژگی که برای هر $k \in \{n, n + ۱, n + ۲\}$ و هر $x, y \in R$، $(xy)^k = x^ky^k$. ثابت کنید R جابه‌جایی است.

۵) از سه نفر که مظنون به قتل هستند، یکی قاتل است. قرار است آزمایشی روی این ۳ نفر انجام شود که شامل ۵ سوال است. اگر فرد تحت آزمایش بی‌گناه باشد احتمال اینکه در برابر هر سوال واکنش مثبت نشان دهد ۰/۴ است و اگر گناهکار باشد، احتمال اینکه واکنش مثبت نشان دهد ۰/۸ است. از این سه نفر یکی را به تصادف انتخاب کرده، او را تحت آزمایش قرار می‌دهیم. این فرد در برابر ۴ سوال واکنش مثبت و یک سوال واکنش منفی نشان می‌دهد. احتمال اینکه او قاتل باشد چقدر است؟

۶) فرض کنید X یک مجموعه و r عددی طبیعی باشد. X_r را مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های r عضوی X در نظر بگیرید. فرض کنید F زیرمجموعه‌ای از X_r باشد، با این ویژگی که اشتراک هر k عضو F ناتهی است ($k \geq ۲$ عددی ثابت است). اگر قرار دهیم

$$I(F) = \min\{|T| : T \subseteq X;\ T \cap A \neq \phi, \forall A \in F\},$$

ثابت کنید $I(F) \leq \frac{r-۱}{k-۱} + ۱$.

موفق باشید.