

بسم الله الرحمن الرحيم

## مسابقات ریاضی

۱۳ بهمن ۱۳۷۳ (صبح)

وقت ۳ ساعت

مسئله ۱: فرض کنید  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع حقیقی بیوست که بر  $[a, b]$  تعریف شده‌اند، باشد. به علاوه فرض کنید  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  دو دنباله در  $[a, b]$  باشند به طوری که  $a_n \rightarrow a$  و  $b_n \rightarrow b$ . ثابت کنید اگر دنباله  $\{f_n\}$  به طور یکنواخت بر  $[a, b]$  به تابع  $f$  همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

مسئله ۲: فرض کنید  $R'$  حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد و  $R$  زیرحلقه‌ای از آن باشد. به علاوه فرض کنید  $U$  ایده‌آلی سره از  $R$  باشد و  $x \in R'$  عضو یکانی باشد. در این صورت ثابت کنید  $UR[x]$  ایده‌آل سره از  $R[x]$  است یا  $(UR[x^{-1}])$  ایده‌آل سره از  $(R[x^{-1}])$  است. (حلقه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در  $R$  است).

مسئله ۳: اگر  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی باشند و  $a < b \leq 1$ . ثابت کنید  $ab$  عدد  $1 - a^2 + b^2$  را می‌شمارد اگر و تنها اگر  $a$  و  $b$  در عضو متوالی دنباله

$$u_0 = 1, u_1 = k, \dots, u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 1}{u_n - 1}, \dots$$

باشند (وقتی  $k$  یک عدد صحیح بزرگتر از ۱ است).

بسمه تعالی

## مسابقه ریاضی

۱۳ بهمن ۱۳۷۳ (عصر)

وقت ۳ ساعت

- مسئله ۴: فرض کنید تابع  $R \rightarrow R : f$ ، سه بار مشتق پذیر باشد و عدد ثابت  $t$  موجود باشد که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = t$$

اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0$  ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$$

- مسئله ۵: فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس  $n \times n$  با درایه های مختلط باشند و  $AB^T - B^T A = B$ . ثابت

$$B^n = 0$$

مسئله ۶: یک تکه شکلات مستطیل شکل از  $6 \times 3$  قطعه مریغ شکل تشکیل شده است به طوری که قطعه

گوشة سمت چپ بالایی زهرآلود شده است دو بازیکن به نوبت قطعه ای مریغ شکل از شکلات را شکسته

و آن را می خورند. بازیکنی که در پایان حریف خود را با تنها قطعه شکلات زهرآلود باقی می گذارد برنده

بازی است. استراتژی بردن این بازی را تشریح کنید. هرگاه شکلات  $m \times n$  قطعه تشکیل شده باشد

چطور؟

*		1