

بسمه تعالی

مسابقه ریاضی

۱۳ بهمن ۱۳۷۳ (صبح)

وقت ۳ ساعت

مسئله ۱: فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی بی‌سره که بر $[a, b]$ تعریف شده‌اند، باشند. به علاوه فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله در $[a, b]$ باشند به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. ثابت کنید اگر دنباله $\{f_n\}$ به طور یکنواخت بر $[a, b]$ به تابع f همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

مسئله ۲: فرض کنید R' حلقه‌ای جاب‌جایی و یک‌دار باشد و R زیرحلقه‌ای از آن باشد. به علاوه فرض کنید U ایده‌آل سره از R باشد و $x \in R'$ عضو یکنایی باشد. در این صورت ثابت کنید $UR[x]$ ایده‌آل سره از $R[x]$ است یا $UR[x^{-1}]$ ایده‌آل سره از $R[x^{-1}]$ است. حلقه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در R است.

مسئله ۳: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $1 \leq a < b$. ثابت کنید ab عدد $a^2 + b^2 - 1$ را می‌شمارد اگر و تنها اگر a و b در عضو متوالی دنباله

$$u_0 = 1, u_1 = k, \dots, u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 1}{u_{n-1}}, \dots$$

باشند (وقتی k یک عدد صحیح بزرگتر از ۱ است).

