بسمه تعالی

مسابقهٔ ریاضی سؤالهای آنالیز
۱۸ بهمن ۱۳۷۴ (صبح)

وقت: ۳ ساعت

مسألهٔ ۱: آیا دنبالهٔ $\{a_n\}$، $a_n \neq 0$ وجود دارد، به‌طوری‌که هر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$ همگرا باشند؟
اگر a_nها مثبت باشند چه می‌توان گفت؟

مسألهٔ ۲: فرض کنید تابع پیوسته $f : [0,1] \to R$ دارای این خاصیت باشد که بازای $k = 0, 1, \ldots, n-1$، $\int_0^1 x^k f(x)dx = 0$ و $\int_0^1 x^n f(x)dx = 1$. نشان دهید وجود دارد $x \in [0,1]$ به‌طوری‌که $|f(x)| \geq 2^n(n+1)$.

مسألهٔ ۳: فرض کنید $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$، تابعی باشد که بازای هر $a \neq 0$، $\lim_{n\to\infty} f(\frac{a}{n})$ $a \neq 0$. آیا می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$؟ خیر

$a_n = \frac{4^n}{n^2} \to 0$

مسألهٔ ۴: فرض کنید $f : [a,b] \to R$ تابعی باشد که $f(a) = f(b) = 0$ و $f(x) + f''(x) > 0$ و برای $a < x < b$ داشته باشیم $f(x) > 0$. ثابت کنید $b - a \geq \pi$.

بسمه تعالی

مسابقهٔ ریاضی سؤالهای جبر

۱۹ بهمن ۱۳۷۴ (صبح)

وقت: ۳/۵ ساعت

مسألهٔ ۱: فرض کنید R یک حلقه بوده و بازای هر x در R داشته باشیم $2x = 0$ و $x = x^{2^n+1}$ (n عددی طبیعی و ثابت است). نشان دهید R حلقه بولی است یعنی بازای هر x، $x = x^2$.

مسألهٔ ۲: فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in R$، xای موجود است که $axa = a$ ثابت کنید اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عناصری از R باشند آنگاه عنصر خود توان e وجود دارد به‌طوری‌که $Rx_1 + \cdots + Rx_n = Re$ (عنصر e را خود توان گوئیم هرگاه $e^2 = e$).

$ax_1 = be$

$\forall a \in R$ x_1

$b = ax_1$

$ax_1 = ax_1x_1x$

$(b - ax_1)x_1 = 0$

$bx_1 = ax_1^2 x$

$(ax_1 - b)x_1 = 0$

$ax_1^2 = bx_1$

$ax_1^2 = bx_1xx_1$

$x_1xx_1 = x_1$

$x_1xx_1 = x_1x$

$(x_1x)^2 = x_1x$

$e = x_1x$

$ax_1 = be$

$ax_1 = bx_1x$

$ax_1^2 = bx_1$

$x_1(b - ax_1)$

مسألهٔ ۳: فرض کنید G گروهی متناهی بوده و اشتراک تمام زیرگروههای pـسیلوی آن عنصر همانی باشد و یکی از pـسیلوهای آن آبلی باشد ثابت کنید:

الف) اگر $P_1, P_2, \ldots, P_n$ زیرگروههای pـسیلویی از G باشند به‌طوری‌که $H = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n \neq \{e\}$ آنگاه $N(H)$ (نرمال‌ساز H) شامل تمام pـسیلوهای G نیست.

ب) دو pـسیلو مانند R و Q از G وجود دارند به‌طوری‌که $R \cap Q = \{e\}$. (e عنصر همانی گروه است).

مسألهٔ ۴: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های صفر و یک باشد. اگر عددی طبیعی مانند m وجود داشته باشد به‌طوری‌که $A^m = J - I$، (J ماتریسی $n \times n$ است که تمام درایه‌های آن یک است) ثابت کنید:

الف) عددی طبیعی مانند a وجود دارد به‌طوری‌که $n = a^m + 1$.

ب) m عددی فرد است.