باسمه تعالی

مسابقه‌ی ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف ـ دانشکده‌ی علوم ریاضی

آزمون : جبر

تاریخ: ۱۳۷۵/۱۱/۷

وقت: ۴ ساعت

---

۱) فرض کنید G گروهی متناهی باشد بطوریکه به ازای هر زیرگروه آبلی H از G داشته باشیم $N_G(H) = C_G(H)$. ثابت کنید G آبلی است.

۲) فرض کنید R حلقه‌ای متناهی باشد که در آن دقیقاً یک عنصر ناصفر موجود است که نه مقسوم‌علیه چپ صفر است و نه مقسوم‌علیه راست صفر. نشان دهید برای هر $x \in R$ داریم $x^۲ = x$.

۳) فرض کنید R حلقه‌ای بدونِ ایده‌ال دوطرفه با مرکز $Z(R) = K$ باشد جاییکه K یک میدان است. حلقه‌ی R را به‌عنوان یک K-فضای برداری در نظر بگیرید. تبدیل K-خطی $T : R \to R$ را تحلیلی گوییم هرگاه $a_۱, \cdots, a_t$ و $b_۱, \cdots, b_t$ در R موجود باشند بطوریکه

$$T(x) = \sum_{i=۱}^{t} a_i x b_i, \qquad \forall x \in R.$$

نشان دهید:

الف) اگر $۰ \neq x \in R$ آنگاه تبدیل خطی تحلیلی T موجود است که $T(x) = ۱$.

ب) اگر $x_۱, \cdots, x_n$، n عنصر مستقل خطی از R باشند آنگاه تبدیل خطی تحلیلی T موجود است که $T(x_i) = ۰$ برای $۱ \leq i \leq n-۱$ و $T(x_n) = ۱$.

۴) برای ماتریسی $n \times n$ چون A با درایه‌های مختلط، فرض کنید A^* ماتریسی باشد که درایه‌ی (k,l)ـام آن عبارت است از $\overline{a_{lk}}$ که a_{lk} درایه‌ی (l,k)ـام ماتریس A است. ماتریس A را یکانی گوییم هرگاه $AA^* = A^*A = I_{n\times n}$. ماتریس A را هرمیتی گوییم هرگاه $A = A^*$.

الف) نشان دهید اگر A هرمیتی باشد آنگاه $A + iI$ وارونپذیر است و ماتریس $(A+iI)^{-۱}(A-iI)$ یکانی است.

ب) فرض کنید $U(n)$ گروه ماتریسهای یکانی $n \times n$ باشد. مرکز این گروه را بیابید.

موفق باشید

باسمه تعالی

مسابقه‌ی ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف ـ دانشکده‌ی علوم ریاضی

آزمون : **آنالیز**

تاریخ: ۱۳۷۵/۱۱/۸

وقت: ۳:۳۰ ساعت

---

۱) نشان دهید که در $\mathbb{R}^2$ مجموعه‌ای چگال و شمارشپذیر وجود دارد که هر خط افقی یا عمودی را فقط در تعداد متناهی نقطه قطع می‌کند.

۲) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر باشد بطوریکه $f''(x) > 0$ و $f(x) + f'(x) > 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}$. نشان دهید که برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) > 0$.

۳) فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع حقیقی پیوسته بر بازه‌ی $[a, b]$ با ویژگیهای زیر باشد:

الف) اگر $f, g \in \mathcal{F}$ آنگاه $0 \le \min(f, g) \in \mathcal{F}$.

ب) $\forall x, \quad \inf_{g \in \mathcal{F}} g(x) = 0$

نشان دهید $\inf_{g \in \mathcal{F}} \int_a^b g(x)dx = 0$.

۴) فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی یکنوا باشد بطوریکه برای هر x, y در $[a, b]$ با $x < y$،وجود داشته باشد $c \in (a, b)$ چنانکه $\int_x^y f(x)dx = f(c)(y - x)$

الف) نشان دهید f تابعی است پیوسته. (طوبه)

ب) اگر f روی $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد ولی یکنوا نباشد آیا بازهم الف) برقرار است؟

موفق باشید