بنام خدا

۷۶/۱۱/۱۶

مسابقهٔ ریاضی دانشجویی

(جبر)

وقت : ۳ ساعت

① فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درآیه‌های در یک میدان بوده به‌طوری که $AA^t = I$ و $\det A = 1$. اگر B زیرماتریسی $k \times k$ از گوشهٔ بالائی سمت چپ A و C زیرماتریسی $(n-k)\times(n-k)$ از گوشهٔ پائینی سمت راست A باشد ثابت کنید $\det B = \det C$.

② اگر G یک گروه باشد، $Fr(G)$ را برابر اشتراک تمام زیرگروههای ماکسیمال G تعریف می‌کنیم (اگر G زیرگروه ماکسیمال نداشته باشد تعریف می‌کنیم $Fr(G) = G$).
فرض کنید G یک گروه بوده و $H \triangleleft G$. اگر $Fr(H)$ گروهی با تولید متناهی باشد نشان دهید که $Fr(H)$ زیرگروهی از $Fr(G)$ است.

③ فرض کنید R یک حلقه بوده و S یک زیرحلقه از آن باشد. اگر $[(R,+):(S,+)]<\infty$ ثابت کنید ایده‌آل I از R وجود دارد به طوری که $I \subseteq S$ و $[(R,+):(I,+)]<\infty$.
منظور از $[G:H]$ اندیس H در G است.

④ فرض کنید R یک حلقه (نه لزوماً یکدار) باشد. اگر $M_n(R)$ حلقهٔ ماتریسهای $n \times n$ روی R باشد، ثابت کنید دو شرط زیر معادلند:

(i) هر ایده‌آل $M_n(R)$ به‌صورت $M_n(I)$ است که I ایده‌آلی از R است.

(ii) برای هر ایده‌آل I از R داریم $I = IR = RI$.

۷۶/۱۱/۱۶

بنام خدا

مسابقهٔ ریاضی دانشجویی

(آنالیز)

وقت : ۳ ساعت

۱) ✓ برای هر تابع انتگرال پذیر $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ ، نشان دهید نامساوی زیر برقرار است :

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right)^2+\frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx\right)^2$$

چه وقت تساوی برقرار است؟

۲) فرض کنید $f:[0,1]\to[0,1]$ تابعی پیوسته بوده به طوری که به ازای هر $x\in[0,1]$ ، $f^{-1}(x)$ مجموعه‌ای متناهی باشد و بعلاوه داشته باشیم $f(1)=1$ و $f(0)=0$. قرار دهید $E=\{x\in[0,1] \mid |f^{-1}(x)| \text{ عددی زوج است}\}$. ثابت کنید E نمی‌تواند ناشمارا باشد.

۳) ✓ فرض کنید $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر بوده و $0<u<\pi$ عددی ثابت باشد. اگر به ازای هر $x\in(0,u)$ داشته باشیم $f''(x)+f(x)\geqslant 0$ و $f(0)=f(u)=0$ و بعلاوه f روی $[0,u]$ متحد با تابع صفر نباشد در این صورت نشان دهید به ازای هر $x\in(0,u)$ داریم $f(x)<0$.

۴) ✓ فرض کنید $M_n=\sup\limits_{0\leqslant x\leq 1}\frac{x^n(1-x)}{\log(n+1)}$. ثابت کنید سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{\log(n+1)}$ بر بازهٔ $[0,1]$ به طور یکنواخت همگراست اما سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ واگرا است.